ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 24 — 1944 — Heft 1

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über rechteckige Tragflügel sehr großer Tiefe.

Von *P. Kriesis* in Athen.

Die Luftkräfte auf einen unendlichtiefen Tragflügel können aus der Widerstandszahl der zweidimensionalen ebenen Platte berechnet werden. Bei Seitenverhältnissen $0 < \frac{b}{t} < \frac{1}{2}$ *ergibt sich dann ein einfacher Ausdruck für den Auftrieb, der gut mit entsprechenden Messungen von Winter übereinstimmt.*

1. Der rechteckige Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis ist in der letzten Zeit von W. Bollay[1]) und K. Wieghardt[2]) behandelt worden. In beiden Untersuchungen werden die Luftkräfte aus den gebundenen Tragflügelwirbeln, welche senkrecht auf der Anströmungsgeschwindigkeit V stehen, und dem Kutta-Joukowskischen Satz berechnet. Die abgehenden Wirbel liegen bei Wieghardt in der Richtung von V, während Bollay annimmt, daß sie mit dem Tragflügel einen bestimmbaren Winkel bilden. Wieghardt hat mit denselben Ansätzen den Fall untersucht, daß die Hinterkante im Unendlichen liegt, während die Saugkante im Endlichen bleibt (a. a. O. S. 266), und Bollay hat den Grenzfall eines zu beiden Seiten unendlichtiefen Tragflügels behandelt (a. a. O., S. 33 bis 35).

Wir werden im folgenden zeigen, daß das Problem des unendlichtiefen Tragflügels nicht mit den Methoden der Tragflügeltheorie behandelt werden darf, da es unmittelbar mit der zweidimensionalen Strömung um eine ebene Platte zusammenhängt. Es ergibt sich dann für die Normalkraft auf den beiderseitig unendlichtiefen Tragflügel ein Wert, welcher mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt, und aus diesem ein Näherungswert für den Auftrieb eines Tragflügels endlicher, aber sehr großer Tiefe bei kleinem Anstellwinkel.

2. Wir betrachten in Bild 1 einen zu beiden Seiten unendlichtiefen Tragflügel, in dessen Ebene die Achse Oy senkrecht auf der Anströmungsgeschwindigkeit V steht, Oz parallel zu den Seitenkanten in der Mitte der Spannweite b, und Ox senkrecht auf Oy und Oz ist. Wenn dieser Tragflügel unter dem Anstellwinkel α mit der Geschwindigkeit V angeströmt wird, so muß man für die Berechnung der Luftkräfte die Druckverteilung und das Geschwindigkeitsfeld als Funktionen des Ortes und der Zeit bestimmen. Die strenge Lösung dieses Problems genügt, als instationäre Strömung aufgefaßt, den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen:

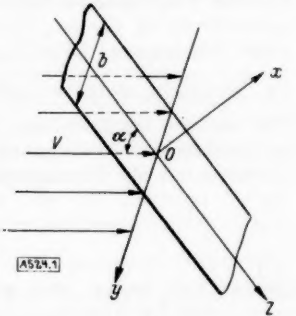


Bild 1.

[1]) W. Bollay: Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 21.

[2]) K. Wieghardt: Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 257.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

der Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$, und den Randbedingungen: $p_\infty=p_0$, $u_\infty=V\sin\alpha$, $v_\infty=0$, $w_\infty=V\cos\alpha$ im Unendlichen, und: $u=v=w=0$ auf dem Tragflügel, also auf der Fläche: $x=0$, $-\frac{b}{2}\leqq y\leqq\frac{b}{2}$, $-\infty<z<+\infty$.

Unser Problem wird aber wegen:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

in folgende zwei getrennte Probleme aufgespaltet:

1. Es sollen $p(x,y,t)$, $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen in zwei Dimensionen und der entsprechenden Kontinuitätsgleichung, die wir nicht wieder hinschreiben, berechnet werden, mit den Randbedingungen: $p_\infty=p_0$, $v_\infty=0$, $u_\infty=V\sin\alpha$ im Unendlichen, und $u=v=0$ auf der Linie: $x=0$, $-\frac{b}{2}\leqq y\leqq\frac{b}{2}$.

Die Lösung dieses Problems ist aber gerade die zweidimensionale Strömung um eine ebene Platte der Breite b, die senkrecht mit der Geschwindigkeit $V\sin\alpha$ angeströmt wird.

2. Es soll die Funktion $w(x,y,t)$ berechnet werden, welche der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u(x,y,t)\frac{\partial w}{\partial x}+v(x,y,t)\frac{\partial w}{\partial y}=Z+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

genügt, und die Randbedingungen: $w=0$ auf der Linie: $x=0$, $-\frac{b}{2}\leqq y\leqq\frac{b}{2}$ und $w_\infty=V\cos\alpha$ erfüllt. Dabei müssen die Funktionen $u(x,y,t)$ und $v(x,y,t)$ aus dem Problem 1 eingesetzt werden.

3. Man erkennt auf diese Weise, daß erhebliche Geschwindigkeitskomponenten in der z-Richtung auftreten, welche sogar örtlich und zeitlich rasch veränderlich sein werden und bei kleinen Anstellwinkeln viel größer als die anderen Komponenten sind. Dieser Umstand macht jedoch für die Druckverteilung absolut nichts aus. Es genügt also für die Berechnung der Druckkräfte auf den Tragflügel nur die Druckverteilung auf das Profil einer ebenen Platte bei senkrechter Anströmung zu kennen, welche ja experimentell gut bekannt ist.

Die Reibungskräfte auf der Tragflügeloberfläche sind dagegen von den Reibungskräften auf die ebene Platte im zweidimensionalen Problem verschieden, da jetzt in dem Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten auch die Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ auftreten, die erst berechnet werden können, wenn das Problem 2 gelöst ist. Bei allen diesen Strömungen kann man aber bekanntlich die Reibungskräfte auf die Körperoberfläche gegen die Druckkräfte vernachlässigen. Auf der Tragflügeloberfläche wirken daher dieselben Luftkräfte wie auf einer ebenen Platte, deren Profil in der x-y-Ebene senkrecht mit der Geschwindigkeit $u_\infty=V\sin\alpha$ angeströmt wird. Die gesamte Druckkraft ist also eine Normalkraft, die in der x-Richtung senkrecht auf die Tragfläche steht und pro Längeneinheit der Flügelsehne den Betrag hat: $N=c_w\frac{\varrho}{2}u_\infty^2\,b$. Hierbei ist ϱ die Luftdichte und c_w die Widerstandszahl, die bekanntlich für die ebene Platte bei senkrechter Anströmung den Wert 2 hat[3]). Wegen $u_\infty=V\sin\alpha$ folgt hieraus für den Koeffizienten der Normalkraft:

$$c_N=\frac{N}{\frac{1}{2}\varrho V^2 b}=c_w\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha.$$

Diesen Wert haben aber gerade die Experimente von Winter[4]) nach Flügel[5]) für einen unendlichtiefen Tragflügel ergeben. Unsere Ableitung läßt erkennen, daß er für alle Anstell-

[3]) Vgl. z. B. O. Flachsbart: Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 32.
[4]) H. Winter: Forsch. Ing.-Wes. Bd. 6 (1935), B, S. 40.
[5]) G. Flügel: Schiffbau, Bd. 30 (1929), S. 336.

winkel von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gilt. Man sieht ferner, daß der Kutta-Joukowskische Satz in dieser Strömung nicht gilt, da sie abgerissen ist, und daß die Luftkräfte durch das Auftreten der Wirbel in der z-Richtung hervorgerufen werden, während die Wirbel in der y-Richtung eine ganz nebensächliche Rolle spielen. Die Annahmen von Bollay sind also in der Strömung um den beiderseitig unendlichtiefen Tragflügel nicht erfüllt. Seine Rechnung führt übrigens in diesem Fall, trotzdem sie den richtigen Wert $c_N = 2\sin^2 \alpha$ ergibt, auf einen Widerspruch betreffend die Gestalt der abgehenden Wirbellinien, auf welchen Bollay auch hinweist.

4. Weniger einfach als der vorhin behandelte Grenzfall ist der Fall eines einseitig unendlichtiefen Tragflügels. Man muß dabei unterscheiden, ob die Vorderkante oder ob die Hinterkante im Endlichen liegt.

Den ersten Fall hat Wieghardt für kleine Anstellwinkel mit den Methoden der Tragflügeltheorie behandelt. Seine Untersuchung ergibt für den Auftrieb des gesamten unendlichtiefen Tragflügels den endlichen Wert: $A = 0{,}789\, \varrho\, V^2\, b^2 \sin \alpha$. Dieses nicht sehr wahrscheinliche Ergebnis rührt davon her, daß nur an der Vorderkante gebundene Wirbel in der y-Richtung auftreten, während weiter hinten die Normalgeschwindigkeit $-V \sin \alpha$ auf der Tragflügeloberfläche allein von den abgehenden Wirbeln induziert wird. Nach dem Kutta-Joukowskischen Satz sollten daher etwas hinter der Vorderkante keine Luftkräfte mehr auftreten. Das trifft aber in Wirklichkeit nicht zu; denn die starken abgehenden Wirbel der Vorderkante lösen sich sehr bald auf, und es tritt an ihrer Stelle allmählich die abgerissene Strömung um den beiderseitig unendlichtiefen Tragflügel auf, die bei $z = +\infty$ voll ausgebildet ist.

Zwischen dem Gebiet, wo diese Strömung herrscht und der Vorderkante wird also nicht mehr die Normalkraft $N = \sin^2 \alpha\, \varrho\, V^2\, b$ pro Längeneinheit der Flügelsehne wirken, sondern es werden erheblich stärkere Kräfte auftreten. Wir fassen alle diese zusammen, und nennen A_V^∞ den Auftrieb, der sich insgesamt an der Vorderkante der Normalkraft N pro Längeneinheit der Flügelsehne überlagert. Dieser zusätzliche Auftrieb rührt von den gebundenen Wirbeln in der y-Richtung her, die nach Wieghardt den Beitrag $A_G^\infty = 0{,}789\, \varrho\, V^2\, b^2 \sin \alpha$ liefern, und von den hohen Unterdrücken, welche die starken, abgehenden Wirbel der Vorderkante bei ihrer Auflösung an den Seitenrändern des Übergangsgebietes hervorrufen. Wir nehmen an, daß diese zusätzlichen Kräfte der abgehenden Wirbel des Übergangsgebietes linear von der Intensität der gebundenen Wirbel abhängen, und daher auch dem Auftrieb A_G^∞ proportional sind. Dann ist:

$$A_V^\infty = \zeta\, A_G^\infty = 0{,}789\, \zeta\, \varrho\, V^2\, b^2 \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wo ζ eine Konstante bedeutet, die wir später bestimmen werden.

Da der Tragflügel unendlich tief ist, und auf ihn außer dem Auftrieb A_V^∞ auch die Normalkraft $N = \sin^2 \alpha\, \varrho\, V^2\, b$ pro Längeneinheit der Flügelsehne wirkt, erfährt der Tragflügel also tatsächlich einen unendlichen Gesamtauftrieb.

5. In dem Fall, wo die Hinterkante im Endlichen liegt, werden in ihrer Umgebung die gebundenen Wirbel in der y-Richtung nur bei großen Anstellwinkeln eine Rolle spielen. Bei kleinen Anstellwinkeln müssen wir aber annehmen, daß zu Beginn der Bewegung ein Anfahrwirbel abgespült wird, so daß von den beiden Seitenkanten zwei Wirbelzöpfe in Strömungsrichtung abgehen und in der Nähe der Hinterkante nur ganz schwache zusätzliche Wirbel in der y-Richtung auftreten. Es wird also in diesem Falle keine wesentliche Änderung der Druckverteilung entstehen, und man wird die Luftkräfte wie beim beiderseitig unendlichtiefen Tragflügel berechnen können. Der Unterschied mit dem im vorigen Abschnitt behandelten Fall liegt gerade darin, daß dort jenseits des Tragflügels keine Wirbel in der z-Richtung vorhanden sind, so daß an der Vorderkante starke Wirbel in der y-Richtung auftreten müssen.

6. Die Strömung um einen Tragflügel endlicher, aber sehr großer Tiefe wird bei kleinen Anstellwinkeln von den vorhin behandelten nicht sehr verschieden sein. Wir nehmen wieder an, daß sich der Normalkraft $N = \sin^2 \alpha\, \varrho\, V^2\, b$ pro Längeneinheit der Flügelsehne ein Auftrieb A_V überlagert, welcher nur von den gebundenen Wirbeln in der y-Richtung abhängt, die sich an der Vorderkante ausbilden, so daß für alle Seitenverhältnisse, für welche $A_G = A_G^\infty$ ist, auch $A_V = A_V^\infty$ gilt. Den Anteil A_G von A_V kann man aber für das jeweilige Seitenverhältnis direkt aus Bild 8 der Untersuchung von Wieghardt entnehmen (a. a. O., S. 268). Man findet, daß für alle Seitenverhältnisse $\frac{b}{t}$, die kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, A_G gleich dem asymptotischen Grenzwert $A_G^\infty = 0{,}789\, \varrho\, V^2\, b^2 \sin \alpha$ gesetzt werden kann. Für diese Seitenverhältnisse ist also die gesamte Normalkraft auf den Tragflügel wegen (1):

$$N = A_V^\infty \cos \alpha + \sin^2 \alpha\, \varrho\, V^2\, b\, t$$
$$= 0{,}789\, \zeta\, \varrho\, V^2\, b^2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha\, \varrho\, V^2\, b\, t.$$

Und der Koeffizient der Normalkraft:

$$c_N = \frac{N}{\frac{1}{2}\varrho V^2 b t} = 2\sin^2\alpha + 0{,}789\,\zeta\,\frac{b}{t}\sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wo die Konstante ζ noch bestimmt werden muß.

Wenn man c_N über $\frac{b}{t}$ aufträgt, so stellt bei festem ζ die Gl. (2) eine Schar von Geraden dar, deren jede einem gewissen Anstellwinkel α entspricht. In Bild 2 sind diese Geradenscharen für $\zeta = 1$ gestrichelt und für $\zeta = 2{,}15$ ausgezogen gezeichnet worden. Man sieht, daß die von Winter im Bereich $0 < \frac{b}{t} < \frac{1}{2}$ gemessenen Werte von c_N, besonders bei den kleineren Anstellwinkeln, mit guter Näherung auf der ausgezogenen Geradenschar liegen, so daß $\zeta = 2{,}15$ gesetzt werden muß. Auf diese Weise wird also die Beziehung $c_N\left(\frac{b}{t}=0\right) = 2\sin^2\alpha$ und die von Gl. (2) geforderte lineare Abhängigkeit des Koeffizienten c_N von $\sin 2\alpha$ und $\frac{b}{t}$ im Intervall $0 < \frac{b}{t} < \frac{1}{2}$ durch die Versuchsergebnisse von Winter gut bestätigt. Für größere Seitenverhältnisse darf aber Gl. (2) nicht mehr angewandt werden, denn es ist dann $\frac{A_G}{\varrho V^2 b^2 \sin\alpha} < \frac{A_G^\infty}{\varrho V^2 b^2 \sin\alpha}$, wie Bild 8 der Untersuchung von Wieghardt erkennen läßt. Tatsächlich fallen auch die gemessenen Werte von c_N für $\frac{b}{t} > \frac{1}{2}$ unter die ausgezogenen Geraden.

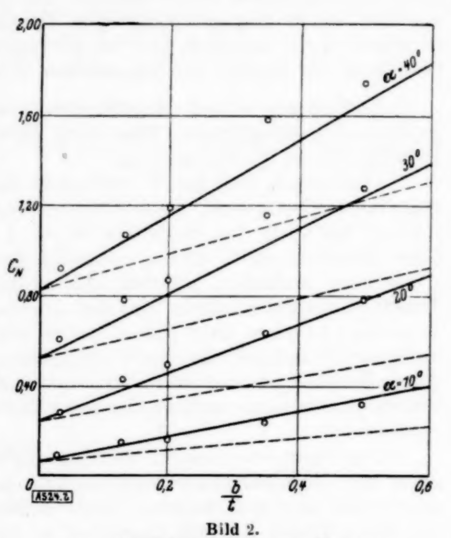


Bild 2.
o Versuchsergebnisse von Winter.
——— Die Geraden der Gl. (2) mit $\zeta = 2{,}15$.
- - - - Die Geraden der Gl. (2) mit $\zeta = 1$.

Für Seitenverhältnisse $0 < \frac{b}{t} < \frac{1}{2}$ können wir jetzt auch den Auftrieb des Tragflügels berechnen. Es ist wegen $\zeta = 2{,}15$:

$$A = A_T^\infty + \cos\alpha\sin^2\alpha\,\varrho V^2 b t$$
$$= 1{,}7\,\varrho V^2 b^2 \sin\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha\,\varrho V^2 b t.$$

Und für kleine Anstellwinkel α:

$$A = \frac{1}{2}\varrho V^2 b t\left(2\alpha^2 + 3{,}4\,\alpha\frac{b}{t}\right).$$

Hieraus folgt die Auftriebszahl und der Auftriebsbeiwert:

$$c_a = \frac{A}{\frac{1}{2}\varrho V^2 b t} = 2\alpha^2 + 3{,}4\,\alpha\frac{b}{t},$$

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = 4\alpha + 3{,}4\frac{b}{t}.$$

Bei den Tragflügeln sehr großer Tiefe hängt also $\frac{dc_a}{d\alpha}$ linear von dem Anstellwinkel α und dem Seitenverhältnis $\frac{b}{t}$ ab[6]). 524

Eingegangen am 17. 11. 1943.

[6]) Die in Anmerkung [4]) und [5]) angeführten Arbeiten von Winter und Flügel sind dem Verfasser in Athen nicht zugänglich gewesen. — Die in Bild 2 angegebenen Versuchsergebnisse von Winter sind aus der Arbeit von Bollay (a. a. O., S. 31, Fig. 11) entnommen worden.

Biegungsschwingungen eines in beiden Enden unterstützten, punktförmig belasteten Balkens.

Von *T. G. Owe Berg* in Bofors (Schweden).

Es werden die Schwingungen eines Balkens, die durch Gl. (1) dargestellt werden können, unter Einwirkung einer plötzlich angelegten punktförmigen Masse M, die mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0$ bzw. $v_0 \neq 0$ antrifft und an dem Balken haftet, untersucht. Die zwei niedrigsten Schwingungszahlen werden berechnet und als Funktionen von $\frac{M}{M_0}$ und $\frac{\xi}{L}$ graphisch dargestellt.

Wir betrachten im folgenden einen in beiden Enden $x=0$ und $x=L$ unterstützten Balken, der von einer im Punkte $x=\xi$ plötzlich angelegten Masse M zum Schwingen angeregt wird. Die Differentialgleichung der Schwingung ist, wenn wir von der statischen Durchbiegung unter Einwirkung des Eigengewichts des Balkens absehen,

$$E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\varrho F + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m g \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mit den Randbedingungen

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ für } t \leqq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2a), \qquad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=L \quad . \quad . \quad . \quad (2b).$$

Da $m \neq 0$ nur für $x=\xi$ ist, gilt für alle $x \neq \xi$ die einfache Schwingungsgleichung

$$E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varrho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Für $x=\xi$ erhalten wir nach Multiplikation von (1) mit $\mathrm{d}x$ und Integration zwischen den Grenzen $\xi-\varepsilon$ und $\xi+\varepsilon$

$$E I \left[\frac{\partial^3 w(\xi+\varepsilon)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w(\xi-\varepsilon)}{\partial x^3}\right] + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} w(\varrho F + m)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} m g\,\mathrm{d}x \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir lassen jetzt $\varepsilon \to 0$ und setzen $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} m\,\mathrm{d}x = M$. Dann wird für $x=\xi$

$$E I \left[\frac{\partial^3 w(\xi+0)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w(\xi-0)}{\partial x^3}\right] + M \frac{\partial^2 w(\xi)}{\partial t^2} = M g \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wir teilen den Balken in zwei Gebiete ein: I. $0 \leqq x \leqq \xi$; II. $\xi \leqq x \leqq L$, und führen zwei Funktionen w_1 und w_2, eine für jedes Gebiet, ein. Im Punkte $x=\xi$ gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$w_1 = w_2; \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und die Bedingung

$$\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = -\frac{M}{E I}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{M g}{E I} \quad . \quad . \quad . \quad (5a).$$

Eine partikulare Lösung von (3) ist

$$w_n = [A_n \operatorname{Cosh} a\sqrt{\lambda}\,x + B_n \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,x + C_n \cos a\sqrt{\lambda}\,x + D_n \sin a\sqrt{\lambda}\,x]\, e^{i\lambda t} \qquad (n=1,2),$$

wobei der Kürze wegen $a = \sqrt[4]{\frac{\varrho F}{E I}}$ gesetzt wurde. Die Randbedingungen (2b) und (6) geben

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= C_1 = 0, \\ B_1 &= A_2 \frac{\operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}(L-\xi)}{\operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L}, \\ D_1 &= -A_2 \frac{\sin a\sqrt{\lambda}(L-\xi)}{\sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= -A_2 \frac{\operatorname{Cosh} a\sqrt{\lambda}\,L}{\operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L}\,, \\ C_2 &= -A_2 \frac{\sin a\sqrt{\lambda}\,\xi}{\operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi}\,, \\ D_2 &= A_2 \frac{\cos a\sqrt{\lambda}\,L}{\sin a\sqrt{\lambda}\,L}\,\frac{\sin a\sqrt{\lambda}\,\xi}{\operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

Die allgemeine Lösung kann daher geschrieben werden

$$w_1(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \frac{\sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,(L-\xi) \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,x - \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \sin a\sqrt{\lambda}\,(L-\xi) \sin a\sqrt{\lambda}\,x}{\sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi}\, e^{i\lambda t}\, d\lambda \quad \ldots \quad (8a),$$

$$w_2(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \frac{\sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,(L-x) \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi - \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \sin a\sqrt{\lambda}\,(L-x) \sin a\sqrt{\lambda}\,\xi}{\sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi}\, e^{i\lambda t}\, d\lambda \quad \ldots \quad (8b),$$

wobei die Funktion $F(\lambda)$ aus (5a) bestimmt werden soll. Da der Nenner der Integranden in Gl. (8a) und (8b) nur reelle Nullstellen hat, kann die Integration längs der reellen Achse durch Integration längs des in Bild 1 gezeigten geschlossenen Weges L ersetzt werden. Der Weg L setzt sich aus einer Parallelen zur reellen Achse, unmittelbar unter dieser, und aus einem Halbkreis, dessen Halbmesser R ist, zusammen. Lassen wir $R \to \infty$, so gehen die Integranden von (8a) und (8b) gegen Null.

Es wird also

$$\int_L = \int_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi i \sum \text{Res.},$$

wobei $\sum$ Res. die Summe der Residuen bezeichnet.

Wegen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda = 1 \quad \ldots \quad (9)$$

erhalten wir aus (5a)

$$\int_L F(\lambda)\left[-\frac{2a^3\lambda\sqrt{\lambda}}{\operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi} - \frac{M}{EI}\lambda^2\, \frac{\sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,(L-\xi) \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi - \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \sin a\sqrt{\lambda}\,(L-\xi) \sin a\sqrt{\lambda}\,\xi}{\sin a\sqrt{\lambda}\,L \cdot \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \cdot \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi}\right] e^{i\lambda t}\, d\lambda = \frac{Mg}{EI}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda\,.$$

Es wird also

$$F(\lambda) = \frac{-\frac{1}{2\pi i}\frac{Mg}{EI}\cdot \sin a\sqrt{\lambda}\,L \cdot \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \cdot \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi}{\lambda^2\sqrt{\lambda}\left\{2a^3 \sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L + \frac{M}{EI}\sqrt{\lambda}\left[\sin a\sqrt{\lambda}\,L \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,(L-\xi) \cdot \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,\xi - \operatorname{Sinh} a\sqrt{\lambda}\,L \sin a\sqrt{\lambda}\,(L-\xi) \sin a\sqrt{\lambda}\,\xi\right]\right\}} \quad \ldots \quad (10).$$

Wir führen die Transformation

$$a L \sqrt{\lambda} = p$$

ein und verändern den Integrationsweg nach Bild 2. Dann wird

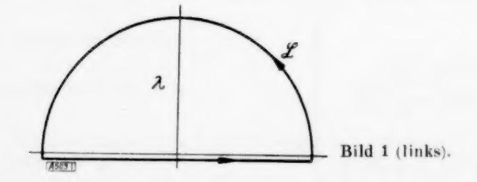


Bild 1 (links).

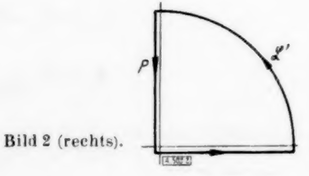


Bild 2 (rechts).

$$w_1(x,t)=\frac{i}{2\pi}\frac{M g L^3}{E I}\int\limits_{L'}\frac{\left[\sin p \operatorname{Sinh} p\frac{L-\xi}{L}\operatorname{Sinh} p\frac{x}{L}-\operatorname{Sinh} p \sin p\frac{L-\xi}{L}\sin p\frac{x}{L}\right] e^{i\frac{p^2}{a^2 l^2}t}}{p^4\left\{\sin p\operatorname{Sinh} p+\frac{M}{2M_0}p\left[\sin p \operatorname{Sinh} p\frac{L-\xi}{L}\operatorname{Sinh} p\frac{\xi}{L}-\operatorname{Sinh} p\sin p\frac{L-\xi}{L}\sin p\frac{\xi}{L}\right]\right\}}\,dp \qquad (11),$$

wo $M_0=\varrho F L$ die Masse des Balkens ist. Für $w_2(x,t)$ gilt ein entsprechender Ausdruck, wo im Zähler x und ξ vertauscht werden sollen.

Die Integration ergibt (nur das halbe Residuum im Pole $p=0$ soll mitgerechnet werden)

$$\begin{aligned} w_1(x,t)=&\frac{M g L^3}{6 E I}\frac{x}{L}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\left(2\frac{\xi}{L}-\frac{x^2}{L^2}-\frac{\xi^2}{L^2}\right)\\ &-2\frac{M g L^3}{E I}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin p_n \operatorname{Sinh} p_n\frac{L-\xi}{L}\operatorname{Sinh} p_n\frac{x}{L}-\operatorname{Sinh} p_n\sin p_n\frac{L-\xi}{L}\sin p_n\frac{x}{L}}{p_n^4\frac{d}{d p_n}\left\{\sin p_n\operatorname{Sinh} p_n+\frac{M}{2M_0}p_n\left[\sin p_n \operatorname{Sinh} p_n\frac{L-\xi}{L}\operatorname{Sinh} p_n\frac{\xi}{L}-\operatorname{Sinh} p_n\sin p_n\frac{L-\xi}{L}\sin p_n\frac{\xi}{L}\right]\right\}}\cos\frac{p_n^2}{a^2 L^2}t\end{aligned} \qquad (12)$$

und entsprechendes für $w_2(x,t)$. Dabei sind p_n die reellen Nullstellen des Nenners

$$\sin p\operatorname{Sinh} p+\frac{M}{2M_0}p\left[\sin p \operatorname{Sinh} p\frac{L-\xi}{L}\operatorname{Sinh} p\frac{\xi}{L}-\operatorname{Sinh} p\sin p\frac{L-\xi}{L}\sin p\frac{\xi}{L}\right] \quad . \; . \; . \quad (13).$$

In Gl. (12) ist das erste Glied der rechten Seite der Beitrag des Poles $p=0$ zum Integral. Das zweite Glied stellt die Summe der Beiträge der Pole $p_n \neq 0$ dar. Setzen wir in Gl. (12) $t=0$ ein, so erhalten wir $w_1(x,0)=0$, da sich die beiden Glieder der rechten Seite dann aufheben. Da die Reihe gliedweise nach t deriviert werden darf, ist auch offenbar $\frac{\partial w_1}{\partial t}=0$ für $t=0$. Die Lösung (12) genügt also den Anfangsbedingungen.

Zahlentafel 1.

p_1

ξ/L	0	0,10 0,90	0,25 0,70	0,50
M/M_0				
0	π	π	π	π
1	π	2,999	2,617	2,384
2	π	2,879	2,350	2,096
6	π	2,526	1,879	1,649
10	π	2,309	1,678	1,463
20	π	2,005	1,423	1,237

p_1^2

ξ/L	0	0,10 0,90	0,25 0,75	0,50
M/M_0				
0	π^2	π^2	π^2	π^2
1	π^2	8,994	6,849	5,683
2	π^2	8,289	5,523	4,393
6	π^2	6,381	3,531	2,719
10	π^2	5,331	2,816	2,140
20	π^2	4,020	2,025	1,530

Zahlentafel 2.

p_2

ξ/L	0	0,03 0,97	0,05 0,95	0,10 0,90	0,15 0,85	0,20 0,80	0,25 0,75	0,40 0,60	0,50
M/M_0									
0	2π	2π	2π	2π	2π	2π	2π	2π	2π
1	2π	—	5,981	5,474	—	5,191	5,283	5,936	2π
2	2π	—	5,708	5,084	4,914	4,957	5,105	—	2π
6	2π	—	5,055	4,587	—	—	4,946	5,8156	2π
10	2π	—	4,755	4,452	—	—	4,911	—	2π
20	2π	—	4,447	4,343	—	—	—	—	2π
∞	4,730	4,010	4,066	4,227	—	—	4,846	—	2π

p_2^2

ξ/L	0	0,03 0,97	0,05 0,90	0,10 0,90	0,15 0,85	0,20 0,80	0,25 0,75	0,40 0,60	0,50
M/M_0									
0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$
1	$4\pi^2$	—	35,77	30,51	—	26,95	27,91	35,24	$4\pi^2$
2	$4\pi^2$	—	32,58	25,47	24,15	24,57	26,06	—	$4\pi^2$
6	$4\pi^2$	—	25,55	21,04	—	—	24,46	33,821	$4\pi^2$
10	$4\pi^2$	—	22,61	19,82	—	—	24,12	—	$4\pi^2$
20	$4\pi^2$	—	19,78	18,86	—	—	—	—	$4\pi^2$
∞	22,37	16,08	16,53	17,68	—	—	23,48	—	$4\pi^2$

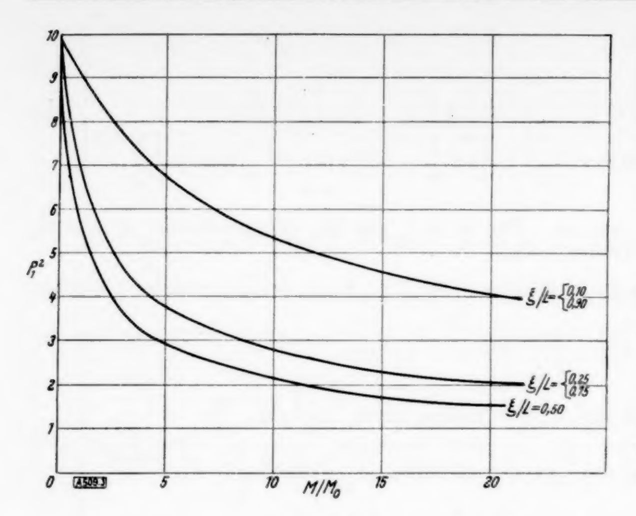


Bild 3.

Zahlentafel 1 gibt die berechneten Werte von p_1 und p_1^2 für verschiedene Werte von $\frac{M}{M_0}$ und $\frac{\xi}{L}$. Die entsprechenden Kurven für p_1^2 sind in Bild 3 und 4 dargestellt. Zahlentafel 2 und Bild 5 und 6 geben Entsprechendes für p_2, p_2^2 bzw. p_2^2.

Die Reihe (12) konvergiert sehr schnell. Mit einem Fehler kleiner als 1% können wir statt (12) schreiben

$$w_1(x,t)=\frac{M g L^3}{6 E I}\,\frac{x}{L}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\left(2\frac{\xi}{L}-\frac{x^2}{L^2}-\frac{\xi^2}{L^2}\right)\left(1-\cos\frac{p_1^2}{a^2 L^2}\,t\right) \quad \text{(14)}.$$

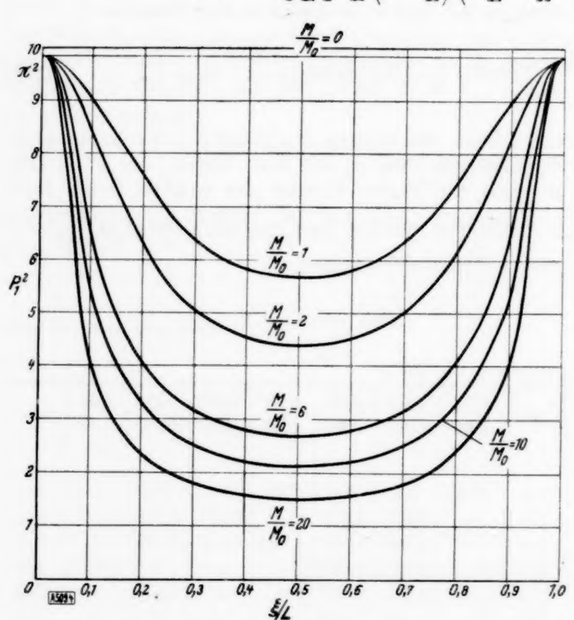


Bild 4.

Das Resultat (12) bzw. (14) kann leicht für eine mit der Geschwindigkeit v_0 auffallende Masse erweitert werden. Wir nehmen dabei an, der Stoß sei vollkommen unelastisch, und setzen statt (2)

$$\frac{\partial w}{\partial t}=v_0 \quad \text{für} \quad x=\xi,\quad t=0.$$

Um dieselben Anfangsbedingungen wie früher zu erhalten, führen wir die Funktionen

$$u_1(x,t)=w_1(x,t)-v_0\,t\,\frac{\frac{x}{L}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\left(2\frac{\xi}{L}-\frac{x^2}{L^2}-\frac{\xi^2}{L^2}\right)}{2\frac{\xi^2}{L^2}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)^2} \quad \text{(15a)},$$

$$u_2(x,t)=w_2(x,t)-v_0\,t\,\frac{\frac{\xi}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(2\frac{x}{L}-\frac{\xi^2}{L^3}-\frac{x^2}{L^2}\right)}{2\frac{\xi^2}{L^2}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)^2} \quad \text{(15b)}$$

ein. Diesen Funktionen sollen die Bedingungen (2) und (6) genügen. Dagegen gilt statt (5a)

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}=-\frac{M}{E I}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{M g}{E I}-\frac{3 v_0 t}{L^3}\,\frac{1}{\frac{\xi^2}{L^2}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)^2} \quad \text{(5b)}.$$

Die Funktionen u_1 und u_2 wurden so gewählt, daß

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

für $t = 0$ und $x = \xi$.

Sie geben Funktionen w_1 und w_2, deren Ableitungen

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t} = v_0$$

für $t = 0$, $x = \xi$.

Diese Funktionen w erfüllen nicht etwa eine Bedingung

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0$$

für $t = 0$, $x \neq \xi$.

Sie geben eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung zur Zeit $t = 0$, und zwar eine mit der statischen Durchbiegungsverteilung identische Geschwindigkeitsverteilung[1]). Physikalisch bedeutet diese Anfangsgeschwindigkeitsverteilung eine unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung. Dieselbe Eigentümlichkeit zeigt die Lösung (12), was aus Gl. (14) besonders deutlich hervorgeht[2]). Entsprechend (9) setzen wir

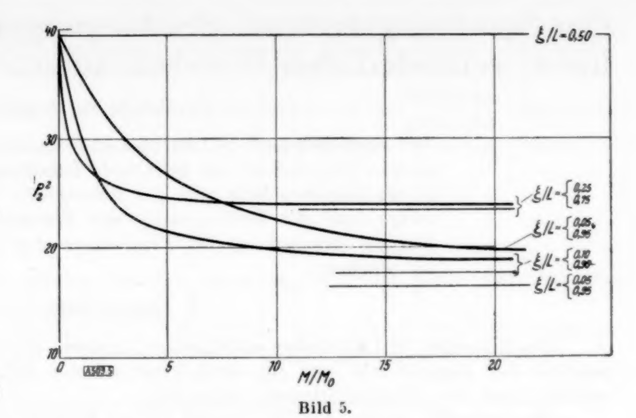


Bild 5.

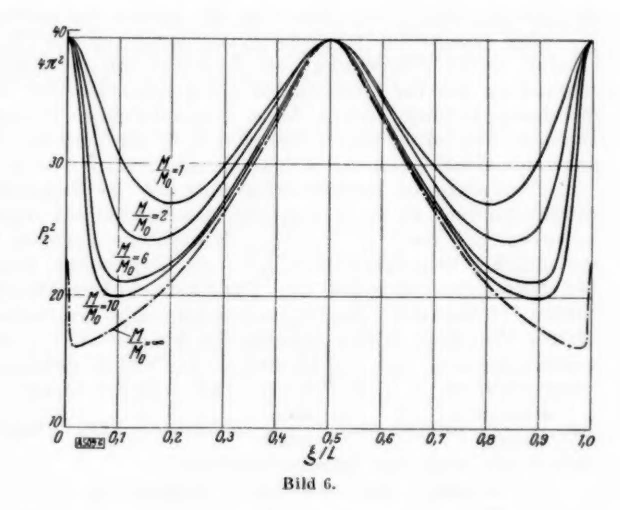


Bild 6.

$$t = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda^2} \, d\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9a).$$

Im Zähler von (10) fügen wir demgemäß $-\frac{3}{2\pi\lambda} \frac{v_0}{L^3} \frac{1}{\frac{\xi^2}{L^2}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)^2}$ hinzu und in (12)

$$+ v_0 \frac{6 a^2 L^2}{\frac{\xi^2}{L^2}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \operatorname{Sinh} p_n \frac{L-\xi}{L} \operatorname{Sinh} p_n \frac{x}{L} - \operatorname{Sinh} p_n \sin p_n \frac{L-\xi}{L} \sin p_n \frac{x}{L}}{p_n^6 \frac{d}{d p_n}\left\{\sin p_n \operatorname{Sinh} p_n + \frac{M}{2 M_0} p_n \left[\sin p_n \operatorname{Sinh} p_n \frac{L-\xi}{L} \operatorname{Sinh} p_n \frac{\xi}{L} - \operatorname{Sinh} p_n \sin p_n \frac{L-\xi}{L} \sin p_n \frac{\xi}{L}\right]\right\}} \sin \frac{p_n^2}{a^2 L^2} t$$

bzw. in (14)

$$+ v_0 \frac{a^2 L^2}{p_1^2} \frac{\frac{x}{L}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)\left(2\frac{\xi}{L} - \frac{x^2}{L^2} - \frac{\xi^2}{L^2}\right)}{2 \frac{\xi^2}{L^2}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)^2} \sin \frac{p_1^2}{a^2 L^2} t.$$

Eingegangen am 15. 9. 1943.

[1]) Handbuch d. Phys. VI, Berlin 1928, S. 550.
[2]) Flügge: Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 313.

Der Spannungszustand der biegungssteifen Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke unter beliebiger Belastung.

Von *H. Nollau* in Dresden.

Die vorliegende Arbeit entwickelt eine Methode zur Berechnung der biegungssteifen Kegelschale bei beliebiger Belastung und enthält die Berechnung der Kreiszylinderschale und der Kreisplatte als Sonderfälle. Die Darstellungsweise und die Erläuterung der Theorie durch ein ausführliches Zahlenbeispiel bezwecken, die Ergebnisse der Abhandlung technisch verwendbar zu machen.

I. Einleitung.

Die Literatur enthält bisher vollständige Angaben über den Spannungs- und Verschiebungszustand der Kegelschale nur für drehsymmetrische Belastung. Unsymmetrische Lastfälle wurden nach der Membrantheorie behandelt.

Die Aufgabe dieser Arbeit besteht in der Berechnung der biegungssteifen Kegelschale für beliebig auftretende Belastung der Ränder bei kräftefreier Schalenoberfläche.

Die Integration der Differentialgleichungen des Problems gelingt jedoch nur bei Kegelschalen, deren Wandstärke zum Abstande von der Kegelspitze proportional ist. Diese Einschränkung hat für Kegelschalen mit gleichbleibender Wandstärke keine Bedeutung, da der Membranspannungszustand durch vorgeschriebene Randbedingungen nur in einem schmalen Bereiche verändert wird. Dasselbe trifft für Rotationsschalen zu, deren Meridian mit genügender Genauigkeit durch eine Gerade ersetzt werden kann.

Vergleichende Berechnungen sind mit der Kegelschale konstanter Wandstärke t_0 durchgeführt worden. Es hat sich gezeigt, daß sich bei den verschiedenen Randbedingungen Ersatzschalen mit $t = t' \cdot y$ derselben Mittelfläche angeben lassen, deren Extremwerte M_y als wesentlicher Schnittkraft mit denen der Kegelschale konstanter Wandstärke übereinstimmen. Die Betrachtungen galten nur für rotationssymmetrische Belastung, können aber auch auf höhere Harmonische übertragen werden. Die Ersatzschale hat bei sehr dünner Wandung nahezu dieselbe Randstärke wie die Schale mit t_0, dagegen schneiden sich die Leibungen bei dicken Schalen nach Bild 1 in einem Abstande m vom Auflager. Dabei ist die Strecke m bei Belastung des $\begin{matrix}\text{unteren}\\\text{oberen}\end{matrix}$ Randes nach $\begin{matrix}\text{oben}\\\text{unten}\end{matrix}$ abzutragen. Die Länge der Strecke m richtet sich nach den Randbedingungen.

a) Gelenkige, unverschiebliche Auflagerung.

Bei Vernachlässigung der Querdehnung μ können als Randbedingungen der biegesteifen Schale verwendet werden:

$$N_\varphi = -N_{\varphi\,\text{Membran}}, \qquad M_y = 0.$$

In diesem Falle ist etwa

$$m = \frac{1}{4} L \text{ bis } \frac{1}{2} L.$$

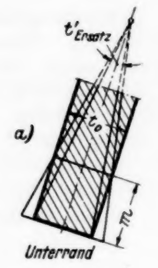
Dabei bedeutet L die Länge der Randwelle der Abklingungsfunktion für die nullte Harmonische der Kegelschale mit $t' = t_0/l$. Wird die Querdehnung berücksichtigt, so sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

$$\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_{\varphi\,\text{Membran}}, \qquad M_y = 0.$$

Sollen die Ringdehnungen der beiden Schalen am unteren Rande gleich sein, so ist die Randstärke der Ersatzschale geringer anzunehmen, als dies bei Übereinstimmung der Randringkräfte der Fall sein müßte, da der im Vergleich zu t_0 vergrößerten Randstärke eine größere Randringkraft entspricht als $-N_{\varphi\,\text{Membran}}$. Die umgekehrten Überlegungen gelten für den oberen Rand. Der Abstand m kann jetzt etwa mit

$$m = \frac{1}{4} L$$

angenommen werden.



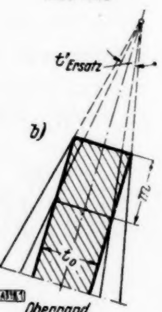


Bild 1.

b) Starre Einspannung.

$$\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_{\varphi\,\text{Membran}}, \qquad w' = -w'_{\text{Membran}};$$

oder bei $\mu = 0$:

$$N_\varphi = -N_{\varphi\,\text{Membran}}, \qquad w' = -w'_{\text{Membran}}.$$

Die Wahl der Ersatzschale richtet sich, abgesehen von der Wandstärke t_0, nach dem Verhältnis ε_φ / w' oder N_φ / w' und damit nach einer Funktion der äußeren Kräfte. Allgemeine Angaben sind also ausgeschlossen. Indessen liefert die Vergleichsschale, deren Wandstärke am $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{unteren}}{\text{oberen}}$ Rande mit t_0 übereinstimmt, für M_y einen nur unwesentlich $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleineren}}{\text{größeren}}$ Grenzwert als $\max M_y$ der Schale gleichbleibender Wandstärke t_0. Das Ergebnis befriedigt, wenn als Stärke der Ersatzschale t_0 im Abstande

$$m = 0 \text{ bis } \frac{1}{4} L \cdot$$

gewählt wird.

Die Schnittkräfte M_φ, N_y, Q_y infolge der Randzwängung besitzen gegenüber M_y, N_φ keine Bedeutung für den Spannungszustand.

Ist an b e i d e n Rändern mit Störungen zu rechnen, so sind zwei verschiedene Ersatzschalen für die Abklingung vom unteren Rande und für die Abklingung vom oberen Rande aufzusuchen.

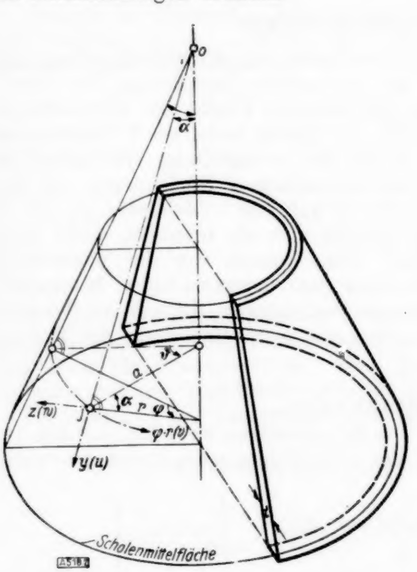
Die Rechnung wird unter den folgenden Voraussetzungen durchgeführt:

1. $t \ll r$.

Daher können die Normalspannungen σ_z und die Gleitungen $\gamma_{yz} = \gamma_{\varphi z}$ gleich Null gesetzt werden. Die Punkte einer ausgezeichneten Schalennormalen liegen infolgedessen nach der Formänderung wiederum auf einer Normalen zur verformten Mittelfläche.

2. $u, v, w \ll t$.

Diese Annahme bringt es mit sich, daß man bei den Verschiebungsgrößen nur lineare Glieder zu berücksichtigen braucht.



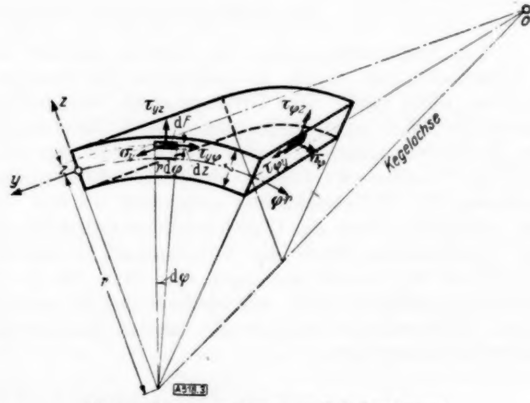


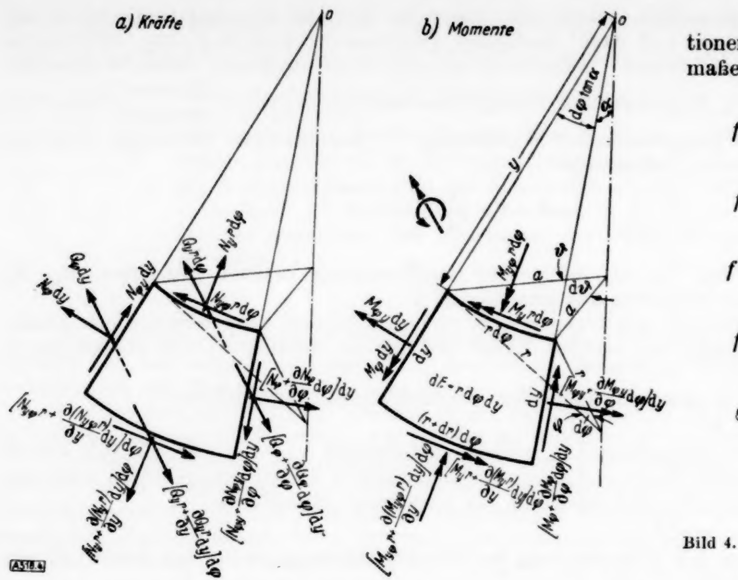
Bild 3. Die Spannungen am Schalenelement.

Bild 2 (links).

Zur Lösung der Aufgabe werden die folgenden Bezeichnungen gebraucht (Bild 2):

α halber Öffnungswinkel des Kegels.
r Hauptkrümmungsradius der Schalenmittelfläche.
a Abstand eines Punktes J des Schalenmittelfläche von der Drehachse.
t Schalenstärke.
t' Winkel zwischen der Innen- und Außenleibung der Kegelschale.
$y, \varphi = \vartheta \cos \alpha, z$ Koordinaten der Schale.
y Abstand des Punktes J von der Kegelspitze.
ϑ Breitenwinkel des Punktes J.
φ Projektion des Winkels ϑ auf den Mantel des Normalkegels zur Schalenmittelfläche. Positiver Drehsinn von φ und ϑ entgegen dem Uhrzeiger.
z Koordinate in Richtung der Schalennormalen mit der Mittelfläche als Ursprung und dem positiven Richtungssinn entgegen zum Krümmungsmittelpunkt.
u, v, w Verschiebungen des Punktes J der Schalenmittelfläche in Richtung der Koordinaten y, ϑ, z.

Bild 3 zeigt die positiven Richtungen der Spannungen, Bild 4 die positiven Richtungen der Schnittkräfte.



Die Differentialoperationen werden folgendermaßen abgekürzt:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$\dot{f}' = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial \varphi},$$

$$f^1 = \frac{\partial f}{\partial \varrho} = l \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\varrho = \frac{y}{l}$$

usw.

Bild 4.

II. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Das Spannungsproblem der Schalen umfaßt die Berechnung von 10 Schnittkräften und 3 Verschiebungen, sodaß 13 Bedingungsgleichungen zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten nötig sind. Das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte am differentialen Abschnitt liefert mit 6 Bedingungen die 6 Gleichungen (2a—f). Hierzu treten die 8 Gleichungen des Verschiebungsansatzes der Schnittkräfte (8a—h), in den die geometrische Verträglichkeit und das Hookesche Gesetz eingehen. Es können also zusammen 14 Beziehungen zur Berechnung der 13 Unbekannten aufgestellt werden. Der Überschuß von 1 Gleichung ist jedoch nur scheinbar, denn die Gleichgewichtsbedingung (2f) erweist sich als Identität, wenn man die Schnittkräfte durch die Verschiebungen ausdrückt. Dies kommt von der paarweisen Gleichheit der Schubspannungen $\tau_{y\varphi} = \tau_{\varphi y}$, die ja aus einer ganz entsprechenden Momentengleichung gefolgert wird. Es bleiben also 13 unabhängige Beziehungen, die sich zu 3 homogenen Differentialgleichungen (9a—c) mit den Unbekannten u, v, w als Grundlage der Theorie zusammenfassen lassen.

A. Gleichgewichtsbedingungen.

Die Spannungen werden durch Integration über die Schalenstärke zu Schnittkräften zusammengefaßt, die auf die Länge 1 der Mittelfläche in den Schnitten $y = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ bezogen werden:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Längskräfte:} && N_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y (1 + z/r)\,\mathrm{d}z, && N_\varphi = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_\varphi\,\mathrm{d}z;\\
&\text{Schubkräfte:} && N_{y\varphi} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{y\varphi} (1 + z/r)\,\mathrm{d}z, && N_{\varphi y} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{\varphi y}\,\mathrm{d}z;\\
&\text{Querkräfte:} && Q_y = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} (1 + z/r)\,\mathrm{d}z, && Q_\varphi = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{\varphi z}\,\mathrm{d}z;\\
&\text{Biegemomente:} && M_y = -\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y (1 + z/r)\,z\,\mathrm{d}z, && M_\varphi = -\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_\varphi\,z\,\mathrm{d}z;\\
&\text{Drillungsmomente:} && M_{y\varphi} = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{y\varphi} (1 + z/r)\,z\,\mathrm{d}z, && M_{\varphi y} = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{\varphi y}\,z\,\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (1\,\text{a—k}).$$

Die Koordinate z wird also nicht gegen den Krümmungshalbmesser r vernachlässigt, und damit nicht von vornherein lineare Spannungsverteilung angenommen. Der allgemeine Ansatz bereitet keine Schwierigkeiten, so daß die Gleichgewichtsbedingungen vollständig befriedigt werden können.

Nach Bild 4 lassen sich die folgenden 6 Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte am differentialen Abschnitt der Kegelschale anschreiben:

1. Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Meridiantangente
$$y\,N'_y + N_y + \dot{N}_{\varphi y} \cot a - N_\varphi = 0$$
2. Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Breitenkreistangente
$$\dot{N}_\varphi \cot a + \dot{y}\,N'_{y\varphi} + N_{y\varphi} + N_{\varphi y} - Q_\varphi \cot a = 0$$
3. Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Schalennormalen
$$N_\varphi \cot a + \dot{Q}_\varphi \cot a + y\,Q'_y + Q_y = 0$$
4. Gleichgewicht der Momente um die Meridiantangente
$$\dot{M}_\varphi \cot a + y\,M'_{y\varphi} + M_{y\varphi} + M_{\varphi y} - y\,Q_\varphi = 0$$
5. Gleichgewicht der Momente um die Breitenkreistangente
$$y\,M'_y + M_y + \dot{M}_{\varphi y} \cot a - M_\varphi - y\,Q_y = 0$$
6. Gleichgewicht der Momente um die Schalennormale
$$M_{\varphi y} \cot a + y\,(N_{y\varphi} - N_{\varphi y}) = 0$$

. . . (2a—f).

B. Elastizitätsgesetz und geometrische Verträglichkeit.

Nach den Annahmen in Abschnitt I bleiben von den 6 Komponenten des Formänderungszustandes des elastischen Körpers nur drei: Die Meridiandehnung ε_y, die Ringdehnung ε_φ und die Gleitung $\gamma_{y\varphi} = \gamma_{\varphi y}$ übrig. Sie sind durch das Elastizitätsgesetz mit den Spannungen σ_y, σ_φ und $\tau_{y\varphi} = \tau_{\varphi y}$ verknüpft:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\,\varepsilon_\varphi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi + \mu\,\varepsilon_y), \\ \tau_{y\varphi} &= \frac{E}{2\,(1+\mu)}\gamma_{y\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3\text{a—c}).$$

Um die Schnittkräfte als Funktionen der Verschiebungen u, v, w der Mittelfläche anzuschreiben, wird die Verzerrung des Flächendifferentials durch den Verschiebungszustand der Mittelfläche ausgedrückt. Dies geschieht in 2 Schritten, von denen der erste die Verschiebungen der Mittelfläche mit der Verzerrung des Differentials der Mittelfläche verbindet, der zweite mit der Verzerrung beliebiger Flächendifferentiale der Schale.

1. Verzerrungsgrößen ε_{y_0}, ε_{φ_0}, $\gamma_{y\varphi_0}$ der Mittelfläche.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{y_0} &= u', \\ \varepsilon_{\varphi_0} &= \frac{1}{y}\,(u + \dot{v} \cot a + w \cot a), \\ \gamma_{y\varphi_0} &= \frac{\dot{u}}{y} \cot a + v' - \frac{v}{y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4\text{a—c}).$$

2. Verzerrungsgrößen ε_y, ε_φ, $\gamma_{y\varphi}$ im Querschnitt.

Die Verzerrungsgrößen einer Mantelfläche vom Krümmungsradius $r+z$ gehen aus den Gl. (4a—c) hervor. Dabei wird r durch $r+z$ und u, v, w durch u_z, v_z, w_z ersetzt:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_y &= u'_z, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r+z}(\dot{v}_z + u_z \tan a + w_z), \\ \gamma_{y\varphi} &= v'_z + \frac{1}{r+z}(\dot{u}_z - v_z \tan a) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5\text{a—c}).$$

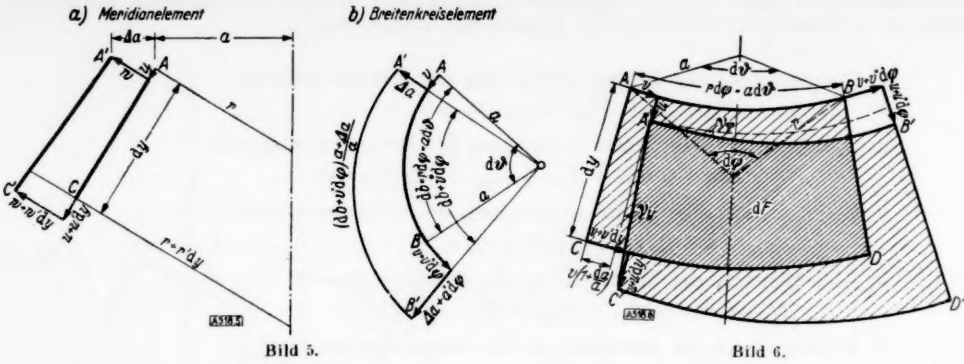


Bild 5. Bild 6.

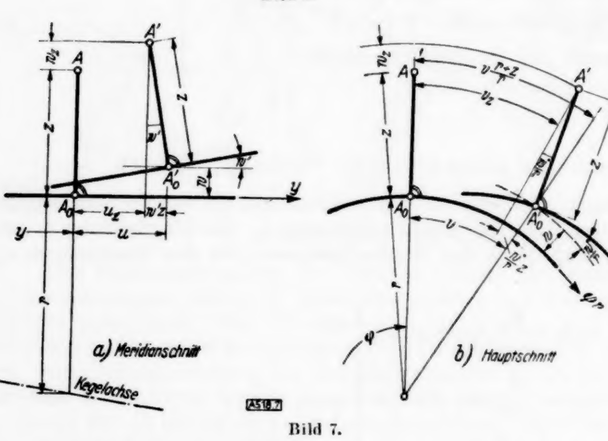


Bild 7.

Der Unterschied zwischen den Verschiebungen u_z, v_z, w_z eines Schalenpunktes A im Querschnitt und den Verschiebungen des zugeordneten Punktes A_0 in der Mittelfläche entsteht nach Bild 7 aus der Bewegung der Schalennormalen $\overline{A A_0}$ bei der Verformung

$$\left.\begin{aligned} u_z &= u - w' z, \\ v_z &= v\,\frac{r+z}{r} - \frac{w^{\cdot}}{r}\,z, \\ w_z &= w - \\ &\quad -\left(w'^2 + \frac{w^{\cdot 2}}{r^2}\right) z \approx w \end{aligned}\right\} \quad (6\,\text{a}-\text{c}).$$

Die Beziehungen zwischen ε_y, ε_φ, $\gamma_{y\varphi}$ und u, v, w lassen sich nunmehr unter Benutzung der Gl. (5) und (6) folgendermaßen anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_y &= u' - w'' z, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r+z}\left(u \tan\alpha + v^{\cdot}\,\frac{r+z}{r} + w - w' z \tan\alpha - w^{\cdot\cdot}\,\frac{z}{r}\right), \\ \gamma_{y\varphi} &= \frac{u^{\cdot}}{r+z} + \left(v' - \frac{v}{r}\tan\alpha\right)\left(1+\frac{z}{r}\right) + \left(\frac{w^{\cdot}}{r}\tan\alpha - w^{\cdot\prime}\right)\left(\frac{z}{r} + \frac{z}{r+z}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (7\,\text{a}-\text{c}).$$

3. Schnittkräfte.

Die Verbindung der Gl. (7) mit dem Hookeschen Gesetz (3) liefert die Spannungen und mit den Ansätzen (1 a—d, g—k) die Schnittkräfte. Die Integrationen nach z werden in den logarithmischen Gliedern nach t/r entwickelt und nach der 3. Potenz abgebrochen.

Mit

$$D = \frac{E t}{1-\mu^2}$$

als Dehnungssteifigkeit und

$$K = \frac{E t}{12(1-\mu^2)}$$

als Biegungssteifigkeit der Schale lassen sich 8 Schnittkräfte als Funktionen der Verschiebungen u, v, w in folgender Form ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} N_y &= D\left[u' + \mu\left(\frac{u}{y} + \frac{v^{\cdot}}{y}\cot\alpha + \frac{w}{y}\cot\alpha\right)\right] - K\,\frac{w''}{y}\cot\alpha, \\ N_\varphi &= D\left[\frac{u}{y} + \frac{v^{\cdot}}{y}\cot\alpha + \frac{w}{y}\cot\alpha + \mu u'\right] + K\left[\frac{w^{\cdot\cdot}}{y^3}\cot^3\alpha + \frac{w}{y^3}\cot^3\alpha + \frac{w'}{y^2}\cot\alpha + \frac{u}{y^3}\cot^2\alpha\right], \\ N_{y\varphi} &= \frac{1-\mu}{2}\,D\left[\frac{u^{\cdot}}{y}\cot\alpha + v' - \frac{v}{y}\right] - \frac{1-\mu}{2}\,K\left[\frac{w^{\cdot\prime}}{y^2}\cot^2\alpha - \frac{w^{\cdot}}{y^3}\cot^2\alpha + \frac{v}{y^3}\cot^2\alpha - \frac{v'}{y^2}\cot^2\alpha\right], \\ N_{\varphi y} &= \frac{1-\mu}{2}\,D\left[\frac{u^{\cdot}}{y}\cot\alpha + v' - \frac{v}{y}\right] + \frac{1-\mu}{2}\,K\left[\frac{w^{\cdot\prime}}{y^2}\cot^2\alpha - \frac{w^{\cdot}}{y^3}\cot^2\alpha + \frac{u^{\cdot}}{y^3}\cot^3\alpha\right], \end{aligned}\right\} \quad (8\,\text{a}-\text{d}),$$

$$\left.\begin{aligned}
M_y &= K\left[w'' + \mu\frac{\ddot{w}}{y^2}\cot^2\alpha + \mu\frac{w'}{y} - \frac{\dot{u}'}{y}\cot\alpha - \mu\frac{\dot{v}}{y^2}\cot^2\alpha\right],\\
M_\varphi &= K\left[\frac{\ddot{w}}{y^2}\cot^2 + \frac{w}{y^2}\cot^2\alpha + \frac{w'}{y} + \frac{\dot{u}}{y^2}\cot\alpha + \mu w''\right],\\
M_{y\varphi} &= (1-\mu)K\left[\frac{\dot{w}'}{y}\cot\alpha - \frac{\dot{w}}{y^2}\cot\alpha + \frac{v}{y^2}\cot\alpha - \frac{v'}{y}\cot\alpha\right],\\
M_{\varphi y} &= (1-\mu)K\left[\frac{\dot{w}'}{y}\cot\alpha - \frac{\dot{w}}{y^2}\cot\alpha + \frac{\dot{u}}{y^2}\frac{\cot^2\alpha}{2} + \frac{v}{y^2}\frac{\cot\alpha}{2} - \frac{v'}{y}\frac{\cot\alpha}{2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (8\,\mathrm{e}\text{—}\mathrm{h}).$$

Dieser Ansatz gelingt jedoch nicht für Q_y und Q_φ, da γ_{yz} und $\gamma_{\varphi z}$ nach den grundsätzlichen Voraussetzungen Null gesetzt worden sind.

C. Differentialgleichungen des Spannungsproblems der Kegelschale.

Der Ansatz (8) enthält keine Angaben über die Querkräfte, die daher aus den 5 Gleichgewichtsbedingungen (2a—e) für die Schnittkräfte entfernt werden. Dazu eliminiert man sie in den Gl. (2d) und (2e) und setzt sie in die Gl. (2b) und (2c) ein. Gl. (2a) kann in der ursprünglichen Form angeschrieben werden.

$$\left.\begin{aligned}
&y N_y' + N_y + \dot{N}_{\varphi y}\cot\alpha - N_\varphi = 0,\\
&\dot{N}_\varphi\cot\alpha + y N_{y\varphi}' + N_{y\varphi} + N_{\varphi y} - \frac{\dot{M}_\varphi}{y}\cot^2\alpha - \dot{M}_{y\varphi}'\cot\alpha - \frac{M_{y\varphi}}{y}\cot\alpha - \frac{M_{\varphi y}}{y}\cot\alpha = 0,\\
&N_\varphi\cot\alpha - M_\varphi' + \frac{\ddot{M}_\varphi}{y}\cot^2\alpha + 2M_y' + y M_y'' + \frac{\dot{M}_{\varphi y}}{y}\cot\alpha +\\
&\qquad + \frac{\dot{M}_{y\varphi}}{y}\cot\alpha + \dot{M}_{\varphi y}'\cot\alpha + \dot{M}_{y\varphi}'\cot\alpha = 0
\end{aligned}\right\} \quad (2\mathrm{a}\text{—}\mathrm{c})'.$$

Diese Gleichungen liefern mit (8) und mit $k = K/D = t^2/12$ drei Bedingungen für das Gleichgewicht der Schnittkräfte als homogene simultane Differentialgleichungen 4. Ordnung mit u, v, w als veränderlichen Größen.

$$\left.\begin{aligned}
&y^4 u'' + y^3\left[-k w'''\cot\alpha + \frac{1+\mu}{2}\dot{v}'\cot\alpha + u' + \mu w'\cot\alpha\right] +\\
&\quad + y^2\left[\frac{1-\mu}{2}\ddot{u}\cot^2\alpha - \frac{3-\mu}{2}\dot{v}\cot\alpha - u - w\cot\alpha\right] + y\left[\frac{1-\mu}{2}k\ddot{w}'\cot^3\alpha - k w'\cot\alpha\right]\\
&\quad + \frac{1-\mu}{2}k\ddot{u}\cot^4\alpha - \frac{3-\mu}{2}k\ddot{w}\cot^3\alpha - k u\cot^2\alpha - k w\cot^3\alpha = 0
\end{aligned}\right\} \quad (9\mathrm{a}),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1-\mu}{2}y^4 v'' + y^3\left[\frac{1+\mu}{2}\dot{u}'\cot\alpha + \frac{1-\mu}{2}v'\right] + y^2\left[-\frac{3-\mu}{2}k\dot{w}''\cot^2\alpha +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{3}{2}(1-\mu)k v''\cot^2\alpha + \ddot{v}\cot^2\alpha + \frac{3-\mu}{2}\dot{u}\cot\alpha + \dot{w}\cot^2\alpha - \frac{1-\mu}{2}v\right] +\\
&\qquad + y\left[\frac{3}{2}(1-\mu)k\dot{w}'\cot^2\alpha - \frac{3}{2}(1-\mu)k v'\cot^2\alpha\right] -\\
&\qquad - \frac{3}{2}(1-\mu)k\dot{w}\cot^2\alpha + \frac{3}{2}(1-\mu)k v\cot^2\alpha = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (9\mathrm{b}),$$

$$\left.\begin{aligned}
&k y^4 w'''' + y^3\left[-k u'''\cot\alpha + 2k w''' + \mu u'\cot\alpha\right] +\\
&\quad + y^2\left[2k\ddot{w}''\cot^2\alpha - \frac{3-\mu}{2}k\dot{v}''\cot^2\alpha - k w'' + \dot{v}\cot^2\alpha + u\cot\alpha + w\cot^2\alpha\right] +\\
&\quad + y\left[\frac{1-\mu}{2}k\ddot{u}'\cot^3\alpha - 2k\ddot{w}'\cot^2\alpha + \frac{3+\mu}{2}k\dot{v}'\cot^2\alpha - k u'\cot\alpha + k v'\right] +\\
&\quad + k\ddddot{w}\cot^4\alpha + \frac{1+\mu}{2}k\ddot{u}\cot^3\alpha + 2k\ddot{w}(\cot^4\alpha + 2\cot^2\alpha) -\\
&\quad - \frac{3+\mu}{2}k\dot{v}\cot^2\alpha + k u(2\cot\alpha + \cot^3\alpha) + k w(\cot^4\alpha + 2\cot^2\alpha) = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (9\mathrm{c}).$$

Die Abhängigkeit der Wandstärke von y geht in den Faktor k ein. Drei Fälle sind von Bedeutung:

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\quad t = \text{const} & : & k = \dfrac{t^2}{12} = \text{const}; \\ 2.\quad t = t_0 + t'\,y: & & k = \dfrac{(t_0 + t'\,y)^2}{12}; \\ 3.\quad t = t'\,y & : & k = \dfrac{t'^2}{12}\,y^2 = \bar{k}\,y^2; \qquad \bar{k} = \dfrac{t'^2}{12}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10\,\text{a--c}).$$

Die mathematische Lösung für die Ansätze 1 und 2 mit konstanter und beliebig linear veränderlicher Wandstärke bereitet Schwierigkeiten, da sich die Integration mit bekannten Funktionen nicht vollziehen läßt und Reihenansätze sehr langwierige Rechnungen erfordern würden. Dagegen gelingt für die Kegelschale, deren Wandstärke nach 3. proportional dem Abstand von der Spitze ist, eine geschlossene Lösung.

Ansatz (8) verwandelt sich mit $t = t'\,y$,

$$\bar{D} = \frac{E\,t'}{1-\mu^2}, \qquad \bar{K} = \frac{E\,t'^3}{12\,(1-\mu^2)}$$

in

$$\left.\begin{aligned}
N_y &= \bar{D}\,[y\,u' + \mu\,(u + v^{\cdot}\cot a + w\cot a)] - K\,\bar{y}^2\,w''\cot a, \\
N_\varphi &= \bar{D}\,[u + v^{\cdot}\cot a + w\cot a + \mu\,y\,u'] + \bar{K}\,[w^{\cdot\cdot}\cot^3 a + w\cot^3 a + y\,w'\cot a + u\cot^2 a], \\
N_{y\varphi} &= \frac{1-\mu}{2}\,\bar{D}\,[u^{\cdot}\cot a + y\,v' - v] - \frac{1-\mu}{2}\,\bar{K}\,[y\,w^{\cdot\prime}\cot^2 a - w^{\cdot}\cot^2 a + v\cot^2 a - y\,v'\cot^2 a], \\
N_{\varphi y} &= \frac{1-\mu}{2}\,\bar{D}\,[u^{\cdot}\cot a + y\,v' - v] + \frac{1-\mu}{2}\,\bar{K}\,[y\,w^{\cdot\prime}\cot^2 a - w^{\cdot}\cot^2 a + u^{\cdot}\cot^3 a], \\
M_y &= \bar{K}\,[y^3 w'' + \mu\,y\,w^{\cdot\cdot}\cot^2 a + \mu\,y^2 w' - y^2 u'\cot a - \mu\,y\,v^{\cdot}\cot^2 a], \\
M_\varphi &= \bar{K}\,[y\,w^{\cdot\cdot}\cot^2 a + y\,w\cot^2 a + y^2 w' + y\,u\cot a + \mu\,y^3 w''], \\
M_{y\varphi} &= (1-\mu)\,\bar{K}\,[y^2 w^{\cdot\prime}\cot a - y\,w^{\cdot}\cot a + y\,v\cot a - y^2 v'\cot a], \\
M_{\varphi y} &= (1-\mu)\,\bar{K}\left[y^2 w^{\cdot\prime}\cot a - y\,w^{\cdot}\cot a + y\,u^{\cdot}\,\frac{\cot^2 a}{2} + y\,v\,\frac{\cot a}{2} - y^2 v'\,\frac{\cot a}{2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (11\,\text{a--h}),$$

und das System (9a—c) erhält nach Division durch y^2 die folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{k}\,y^3 w'''\cot a + y^2\,[-u'' + 3\,\bar{k}\,w''\cot a] - \\
&\quad - y\left[2\,u' + \frac{1+\mu}{2}\,v^{\cdot\prime}\cot a + \frac{1-\mu}{2}\,\bar{k}\,w^{\cdot\cdot\prime}\cot^3 a + (\mu - \bar{k})\,w'\cot a\right] - \\
&\quad - \frac{1-\mu}{2}\,u^{\cdot\cdot}\cot^2 a\,(1 + \bar{k}\cot^2 a) + (1 - \mu + \bar{k}\cot^2 a)\,u + \frac{3\,(1-\mu)}{2}\,v^{\cdot}\cot a + \\
&\quad + \frac{3-\mu}{2}\,\bar{k}\,w^{\cdot\cdot}\cot^2 a + (1 - \mu + \bar{k}\cot^2 a)\,w\cot a = 0 \\[1ex]
&y^2\left[\frac{1-\mu}{2}\,(1 + 3\,\bar{k}\cot^2 a)\,v'' - \frac{3-\mu}{2}\,\bar{k}\,w^{\cdot\prime\prime}\cot^2 a\right] + \\
&\quad + y\left[\frac{1+\mu}{2}\,u^{\cdot\prime}\cot a + (1-\mu)(1 + 3\,\bar{k}\cot^2 a)\,v' - 3\,(1-\mu)\,\bar{k}\,w^{\cdot\prime}\cot^2 a\right] + (2-\mu)\,u^{\cdot}\cot a + \\
&\quad + v^{\cdot\cdot}\cot^2 a - (1-\mu)\,(1 + 3\,\bar{k}\cot^2 a)\,v + (1 + 3\,(1-\mu)\,\bar{k})\,w^{\cdot}\cot^2 a = 0 \\[1ex]
&\bar{k}\,y^4 w'''' + y^3\,\bar{k}\,[-u'''\cot a + 8\,w'''] + \\
&\quad + y^2\,\bar{k}\left[-6\,u''\cot a - \frac{3-\mu}{2}\,v^{\cdot\prime\prime}\cot a + 2\,w^{\cdot\cdot\prime\prime}\cot^2 a + (11 + 3\,\mu)\,w''\right] + \\
&\quad + y\left[+\frac{1-\mu}{2}\,\bar{k}\,u^{\cdot\cdot\prime}\cot^3 a - (7\,\bar{k} - \mu)\,u'\cot a - (3+\mu)\,\bar{k}\,v^{\cdot\prime}\cot^2 a + 4\,\bar{k}\,w^{\cdot\cdot\prime}\cot^2 a - 2\,(1 - 3\,\mu)\,\bar{k}\,w'\right] \\
&\quad + (2-\mu)\,\bar{k}\,u^{\cdot\cdot}\cot^3 a + (1 + \bar{k}\,(\cot^2 a - 1))\,u\cot a + (1 + \bar{k}\,(3 - 5\,\mu))\,v^{\cdot}\cot^2 a + \\
&\quad + \bar{k}\,w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\cot^4 a + (2\cot^2 a - 5 + 6\,\mu)\,\bar{k}\,w^{\cdot\cdot}\cot^2 a + (1 + \bar{k}\,(\cot^2 - 1))\,w\cot^2 a = 0
\end{aligned}\right\} \quad (12\,\text{a--c})$$

Die Arbeit von A. Pflüger [1][1]) über die Stabilität der Kegelschale enthält ähnliche Gedankengänge, die dort ausführlich dargestellt worden sind. Der Differentialansatz (13) seiner Untersuchung läßt sich nach Streichung der Lastglieder in die Gl. (12) überführen.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

III. Auflösung der Differentialgleichungen für die Wandstärke $t=\delta y$.

A. Charakteristische Gleichung.

In jedem Term der Gl. (12) ist der Grad der Ableitung nach y gleich dem Grade der Potenz der Veränderlichen y. Es sind also Eulersche Differentialgleichungen, die einen Potenzansatz in y ermöglichen, der die Auflösung des Systems in Verbindung mit einem Fourieransatz in φ zuläßt.

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \cos\frac{n}{\cos\alpha}\varphi \\ v &= \sum_{n=1}^{n=\infty} v_n \sin\frac{n}{\cos\alpha}\varphi \\ w &= \sum_{n=0}^{n=\infty} w_n \cos\frac{n}{\cos\alpha}\varphi \end{aligned}\right\}\ (13\text{a—c}), \qquad \left.\begin{aligned} u_n &= A_n^* y^{\lambda'_n} \\ v_n &= B_n^* y^{\lambda'_n} \\ w_n &= C_n^* y^{\lambda'_n} \end{aligned}\right\}\ (14\text{a—c}),$$

$$n=0,1,2,3,\ldots\infty; \qquad \frac{n}{\cos\alpha}\varphi = n\,\vartheta. \qquad \lambda' = \lambda - 1/2.$$

Die Fourierschen Reihen (13) werden mit $n/\cos\alpha$ angesetzt, da der Winkel φ bei einer Umdrehung des Meridians von 0 auf 2π nur um $2\pi\cos\alpha$ anwächst. Die Substitution $\lambda=\lambda'+1/2$ empfiehlt sich für die einfachste Berechnung von λ'.

Die Differentialgleichungen (12) ergeben mit den Ansätzen (13) und (14) für jede Harmonische n die 3 linearen Gl. (15a—c), in denen die Konstanten A_n^*, B_n^*, C_n^* und der Exponent λ'_n als Unbekannte auftreten. Sie werden als Matrix angeschrieben. Da sich die folgenden Rechnungen immer auf eine bestimmte Harmonische n beziehen, kann der Index n wieder wegfallen.

A^*	B^*	C^*	
d_{AA}	d_{AB}	d_{AC}	0
d_{BA}	d_{BB}	d_{BC}	0
d_{CA}	d_{CB}	d_{CC}	0

. . . . (15a—c).

$$d_{AA} = \lambda^2 - (1-\mu)\left(1+\frac{1}{2}\frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right) - \frac{1}{4} - \bar{k}\cot^2\alpha\left(1+\frac{1-\mu}{2}\frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right),$$

$$d_{AB} = \frac{1}{2}\frac{n}{\sin\alpha}\left[(1+\mu)\lambda - \frac{7-5\mu}{2}\right],$$

$$d_{AC} = \bar{k}\cot\alpha\left[-\lambda^3+\frac{3}{2}\lambda^2+\left(\frac{\mu}{\bar{k}}-\frac{3}{4}-\frac{1-\mu}{2}\frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right)\lambda-\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{1}{\bar{k}}+\frac{1}{8}+\frac{7-3\mu}{4}\frac{n^2}{\sin^2\alpha}-\cot^2\alpha\right],$$

$$d_{BA} = -\frac{1}{2}\frac{n}{\sin\alpha}\left[(1+\mu)\lambda + \frac{7-5\mu}{2}\right],$$

$$d_{BB} = \frac{1-\mu}{2}(1+3\bar{k}\cot^2\alpha)\left(\lambda^2-\frac{9}{4}\right)-\frac{n^2}{\sin^2\alpha},$$

$$d_{BC} = \bar{k}\,n\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\left[\frac{3-\mu}{2}\lambda^2-2\mu\lambda-\frac{1}{\bar{k}}-\frac{3}{8}(9-11\mu)\right],$$

$$d_{CA} = \bar{k}\cot\alpha\left[-\lambda^3-\frac{3}{2}\lambda^2+\left(\frac{\mu}{\bar{k}}-\frac{3}{4}-\frac{1-\mu}{2}\frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right)\lambda+\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{1}{\bar{k}}-\frac{1}{8}-\frac{7-3\mu}{4}\frac{n^2}{\sin^2\alpha}+\cot^2\alpha\right],$$

$$d_{CB} = \bar{k}\,n\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\left[-\frac{3-\mu}{2}\lambda^2-2\mu\lambda+\frac{1}{\bar{k}}+\frac{3}{8}(9-11\mu)\right],$$

$$d_{CC} = \bar{k}\left[\lambda^4-\left(\frac{7}{2}+3\mu-2\frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right)\lambda^2+\frac{1}{16}(13-12\mu)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{11}{2}-6\mu-2\cot^2\alpha\right)\frac{n^2}{\sin^2\alpha}+\frac{n^4}{\sin^4\alpha}+\left(\frac{1}{\bar{k}}-1\right)\cot^2\alpha+\cot^4\alpha\right].$$

Das System ist homogen und A^*, B^*, C^* sind deshalb nur dann von Null verschieden, wenn die aus seinen 9 Koeffizienten d_{JK} gebildete Determinante verschwindet. Sie führt auf eine symmetrische Gleichung 8. Grades für $\lambda = \lambda' + \frac{1}{2}$. Die in $\bar{k}$ quadratischen Glieder sind klein und werden vernachlässigt. Auf diese Weise läßt sich folgende Bestimmungsgleichung für λ anschreiben.

$$g_8 \lambda^8 + g_6 \lambda^6 + g_4 \lambda^4 + g_2 \lambda^2 + g_0 = 0 \qquad (16).$$

Die Beiwerte g_8 bis g_0 sind nach Multiplikation mit $\frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{2}{1-\mu}$:

$$\left.\begin{aligned}
g_8 &= 1\,, \\
g_6 &= -[7 - 4\mu - 2\mu \cot^2\alpha + 4(1+\cot^2\alpha)\, n^2]\,, \\
g_4 &= +\left\{\frac{127}{8} - 17\mu + 3\mu^2 + \left(\frac{1-\mu^2}{\bar{k}} - 4 - \frac{3}{2}\mu\right)\cot^2\alpha + \cot^4\alpha + \right. \\
&\quad \left. + [17 - 12\mu + (11 - 12\mu)\cot^2\alpha - 6\cot^4\alpha]\, n^2 + 6(1+\cot^2\alpha)^2 n^4\right\}, \\
g_2 &= -\left\{\frac{203}{16} - \frac{79}{4}\mu + \frac{15}{2}\mu^2 + \left(\frac{5}{2}\,\frac{1-\mu^2}{\bar{k}} - 10 + \frac{61}{8}\mu\right)\cot^2\alpha + \frac{5}{2}\cot^4\alpha + \right. \\
&\quad + \left[\frac{71}{4} - 18\mu + \left(\frac{19}{4} - 8\mu\right)\cot^2\alpha - (9 - 8\mu)\cot^4\alpha + 2(2-\mu)\cot^6\alpha\right] n^2 + \\
&\quad + [13 - 12\mu + 2(9 - 11\mu)\cot^2\alpha - (3 + 8\mu)\cot^4\alpha - 2(4-\mu)\cot^6\alpha]\, n^4 + \\
&\quad \left. + 4(1+\cot^2\alpha)^3 n^6\right\}, \\
g_0 &= +\left\{\frac{585}{256} - \frac{63}{16}\mu + \frac{27}{16}\mu^2 + \left(\frac{9}{16}\,\frac{1-\mu^2}{\bar{k}} - \frac{9}{4} + \frac{63}{32}\mu\right)\cot^2\alpha + \frac{9}{16}\cot^4\alpha + \right. \\
&\quad + \left[\frac{215}{16} - \frac{103}{4}\mu + 12\mu^2 + \left(\frac{393}{16} - \frac{189}{4}\mu + 24\mu^2\right)\cot^2\alpha + \left(\frac{129}{8} - 24\mu + 12\mu^2\right)\cot^4\alpha + \right. \\
&\quad \left. + \left(5 - \frac{5}{2}\mu\right)\cot^6\alpha\right] n^2 - \left[\frac{81}{8} - 23\mu + 12\mu^2 + \left(\frac{113}{4} - \frac{105}{2}\mu + 24\mu^2\right)\cot^2\alpha + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{201}{8} - 36\mu + 12\mu^2\right)\cot^4\alpha + \left(6 - \frac{13}{2}\mu\right)\cot^6\alpha - \cot^8\alpha\right] n^4 + \\
&\quad + [3 - 4\mu + (7 - 12\mu)\cot^2\alpha + 3(1 - 4\mu)\cot^4\alpha - (3 + 4\mu)\cot^6\alpha - 2\cot^8\alpha]\, n^6 + \\
&\quad \left. + (1+\cot^2\alpha)^4 n^8\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (16\,\text{a--e}).$$

Die Gl. (16) enthält nur gerade Potenzen in λ und ist daher eine Gleichung 4. Grades für λ^2. Die Wurzeln [2] können reell und komplex sein und in folgender Gliederung auftreten:

1. alle 8 Wurzeln sind reell;
2. alle 8 Wurzeln sind komplex;
3. 4 Wurzeln sind reell, 4 komplex.

So entsteht der folgende allgemeine Ansatz für die Exponenten λ'_r, in dem bei einem reellen Wurzelpaar $\lambda_{r,\,r+1}$ der Imaginärteil $\eta_r = 0$ und $\lambda'_{r,\,r+1} = \xi'_{r,\,r+1}$ zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda'_{1,2} &= \xi'_1 \pm i\,\eta_1 = +\xi_1 - \frac{1}{2} \pm i\,\eta_1; & \xi'_1 &= \xi_1 - \frac{1}{2}; & \xi'_1 &> 0; \\
\lambda'_{3,4} &= \xi'_3 \pm i\,\eta_3 = +\xi_3 - \frac{1}{2} \pm i\,\eta_3; & \xi'_3 &= \xi_3 - \frac{1}{2}; & \xi'_3 &> 0; \\
\lambda'_{5,6} &= \xi'_5 \pm i\,\eta_5 = -\xi_1 - \frac{1}{2} \pm i\,\eta_1; & \xi'_5 &= -\xi_1 - \frac{1}{2}; & \eta_5 &= \eta_1; \quad |\xi'_5| = |\xi'_1| + 1; \\
\lambda'_{7,8} &= \xi'_7 \pm i\,\eta_7 = -\xi_3 - \frac{1}{2} \pm i\,\eta_3; & \xi'_7 &= -\xi_3 - \frac{1}{2}; & \eta_7 &= \eta_3; \quad |\xi'_7| = |\xi'_3| + 1
\end{aligned}\right\} \quad (17).$$

B. Allgemeine Lösung des Ansatzes.

1. Abklingungsfunktion.

a) Mathematische Lösung.

Die allgemeine Lösung der totalen Differentialgleichungen jeder Harmonischen n lautet:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \sum_{r=1}^{r=8} A_r^* y^{\lambda'_r}, \\ v_n &= \sum_{r=1}^{r=8} B_r^* y^{\lambda'_r}, \\ w_n &= \sum_{r=1}^{r=8} C_r^* y^{\lambda'_r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18\text{a–c}).$$

Da die Exponenten λ'_r reell oder konjugiert komplex sind, gilt dasselbe für die Konstanten A^*, B^*, C^*. Damit jedoch in den Ausdrücken für die Verschiebungen u_n, v_n, w_n nur reelle Glieder vorkommen, wird der Ansatz (18) in den komplexen Gliedern r, $r+1$ umgeformt.

$$\lambda'_{r,\nu+1} = \xi'_r \pm i\,\eta_r \qquad (r = 1, 3, 5, 7),$$

$$w_n = \sum_r \left[C_r^* y^{\lambda'_r} + C_{r+1}^* y^{\lambda'_{r+1}}\right] = \sum_r \left[C_r^* y^{\xi_r - \frac{1}{2} + i\eta_r} + C_{r+1}^* y^{\xi_r - \frac{1}{2} - i\eta_r}\right],$$

$$= \sum_r y^{\xi_r - \frac{1}{2}} \left[C_r^* e^{i\eta_r \ln y} + C_{r+1}^* e^{-i\eta_r \ln y}\right],$$

$$= \sum_r y^{\xi_r - \frac{1}{2}} \left[C_r^* (\cos(\eta_r \ln y) + i \sin(\eta_r \ln y)) + \right.$$

$$\left. + C_{r+1}^* (\cos(\eta_r \ln y) - i \sin(\eta_r \ln y))\right],$$

$$w_n = \sum_r y^{\xi_r - \frac{1}{2}} \left[(C_r^* + C_{r+1}^*) \cos(\eta_r \ln y) + i\,(C_r^* - C_{r+1}^*) \sin(\eta_r \ln y)\right]$$

$$C_r = C_r^* + C_{r+1}^*, \qquad C_{r+1} = i\,(C_r^* - C_{r+1}^*) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

C_r und C_{r+1} sind reell, also C_r^* und C_{r+1}^* konjugiert komplex.

$$w_n = \sum_r y^{\xi_r - \frac{1}{2}} \left[C_r \cos(\eta_r \ln y) + C_{r+1} \sin(\eta_r \ln y)\right] \qquad (r = 1, 3, 5, 7) \quad \ldots \quad (20\text{a}).$$

$$\begin{aligned} w_n = {} & y^{\xi_1 - \frac{1}{2}} \left[C_1 \cos(\eta_1 \ln y) + C_2 \sin(\eta_1 \ln y)\right] + \\ & + y^{\xi_3 - \frac{1}{2}} \left[C_3 \cos(\eta_3 \ln y) + C_4 \sin(\eta_3 \ln y)\right] + \\ & + y^{-\xi_1 - \frac{1}{2}} \left[C_5 \cos(\eta_1 \ln y) + C_6 \sin(\eta_1 \ln y)\right] + \\ & + y^{-\xi_3 - \frac{1}{2}} \left[C_7 \cos(\eta_3 \ln y) + C_8 \sin(\eta_3 \ln y)\right]. \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen gelten für u_n und v_n mit den Integrationskonstanten A_r und B_r. Wenn λ_r reell ist, können an Stelle von 20 (a—c) unmittelbar die Gl. (18) benutzt werden.

2. Beziehungen zwischen den Integrationskonstanten.

Zu jeder der 8 Lösungen λ_r, $r = 1-8$, der Gl. (16) gehören nach (14) die drei Integrationskonstanten A_r^*, B_r^*, C_r^*. Sie sind durch die Matrix (15) derart miteinander verknüpft, daß eine gewählt werden kann und damit die beiden anderen bestimmt sind. Die acht Integrationskonstanten C_r^*, $(r = 1-8)$, der Verschiebung w als wichtigster Komponente werden gewählt und daher A_r^*, B_r^* mit den ersten beiden Gl. (15) als Funktion von C_r^* angegeben. Die dritte Gleichung kann zur Nachprüfung verwendet werden. Die Beiwerte der Gl. (15a, b) sind einfacher als die von (15c), so daß die numerische Auswertung auf diese Weise weniger Fehlerquellen enthält.

In jeder Lösung r wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_r^*}{C_r^*} &= \frac{a_r}{c_r}; \quad \frac{B_r^*}{C_r^*} = \frac{b_r}{c_r}; \\ a_r &= d_{AB}\, d_{BC} - d_{BB}\, d_{AC}, \\ b_r &= d_{AC}\, d_{BA} - d_{AA}\, d_{BC}, \\ c_r &= d_{AA}\, d_{BB} - d_{AB}\, d_{BA} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21).$$

Bei komplexen Abklingungszahlen ist außerdem noch das Verhältnis der reellen Konstanten A_r, B_r, C_r der Lösung (20) notwendig. Die Beiwerte von (15a) und (15b) für $\lambda'_{r,r+1} = \xi'_r \pm i\,\eta_r$ sind:

$$\left.\begin{aligned} d_{AA} &= \xi_r'^2 + \xi_r' - \eta_r^2 - (1-\mu)\left(1 + \frac{n^2}{2\sin^2\alpha}\right) - \bar{k}\cot^2\alpha\left(1 - \frac{1-\mu}{2}\,\frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right) \pm i\,\eta_r(2\,\xi_r' + 1), \\ d_{AB} &= \frac{n}{2\sin\alpha}\left[(1+\mu)\,\xi_r' - 3\,(1-\mu) \pm i\,(1+\mu)\,\eta_r\right], \\ d_{AC} &= \cot\alpha\left\{\xi_r'\left[\mu + \bar{k}\left(3\,\eta_r^2 - \xi_r'^2 - \frac{1-\mu}{2}\,\frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right)\right] - (1-\mu) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{k}\left(\frac{3-\mu}{2}\,\frac{n^2}{\sin^2\alpha} - \cot^2\alpha\right) \pm i\,\eta_r\left[\mu - \bar{k}\left(3\,\xi_r'^2 - \eta_r^2 + \frac{1-\mu}{2}\,\frac{n^2}{\sin^3\alpha}\right)\right]\right\} \\ d_{BA} &= -\frac{n}{\sin\alpha}\left[\frac{1+\mu}{2}\,\xi_r' + 2 - \mu \pm i\,\frac{1+\mu}{2}\,\eta_r\right], \\ d_{BB} &= +\frac{1-\mu}{2}\left[(1 + 3\,\bar{k}\cot^2\alpha)(\xi_r'^2 + \xi_r' - \eta_r^2 - 2) - \frac{n^2}{\sin^2\alpha} \pm i\,(1 + 3\,\bar{k}\cot^2\alpha)\,\eta_r\,(2\,\xi_r' + 1)\right], \\ d_{BC} &= n\,\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}\left\{-1 + \bar{k}\left[\frac{3-\mu}{2}\,(\xi_r'^2 - \eta_r^2) + \frac{3-5\mu}{2}\,\xi_r' - 3\,(1-\mu)\right] \pm i\,\bar{k}\,\eta_r\left[(3-\mu)\,\xi_r' + \frac{3-5\mu}{2}\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (22\,\text{a–f}).$$

Das obere Vorzeichen gilt für $\lambda_r' = \xi_r' + i\,\eta_r$, das untere für $\lambda'_{r+1} = \xi_r' - i\,\eta_r$. Die komplexen Koeffizienten d_{JK} ergeben die Verhältniszahlen $a_{r,r+1}$, $b_{r,r+1}$, $c_{r,r+1}$ als letzte komplexe Größen der Rechnung.

Denn nun erfolgt mit

$$\left.\begin{aligned} A_r &= A_r^* + A_{r+1}^*; & B_r &= B_r^* + B_{r+1}^*; & C_r &= C_r^* + C_{r+1}^*; \\ A_{r+1} &= i\,(A_r^* - A_{r+1}^*); & B_{r+1} &= i\,(B_r^* - B_{r+1}^*); & C_{r+1} &= i\,(C_r^* - C_{r+1}^*); \\ A_r^* &= \frac{1}{2}(A_r - i\,A_{r+1}); & B_r^* &= \frac{1}{2}(B_r - i\,B_{r+1}); & C_r^* &= \frac{1}{2}(C_r - i\,C_{r+1}); \\ A_{r+1}^* &= \frac{1}{2}(A_r + i\,A_{r+1}); & B_{r+1}^* &= \frac{1}{2}(B_r + i\,B_{r+1}); & C_{r+1}^* &= \frac{1}{2}(C_r + i\,C_{r+1}) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und (21) der Übergang auf die gesuchten reellen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} A_r &= \alpha_r\,C_r - \alpha_{r+1}\,C_{r+1}; & B_r &= \beta_r\,C_r - \beta_{r+1}\,C_{r+1}; \\ A_{r+1} &= \alpha_{r+1}\,C_r + \alpha_r\,C_{r+1}; & B_r &= \beta_{r+1}\,C_r + \beta_r\,C_{r+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Darin bedeuten die **reellen** Faktoren α und β:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{a_r\,c_{r+1} + a_{r+1}\,c_r}{2\,c_r\,c_{r+1}}; & \beta_r &= \frac{b_r\,c_{r+1} + b_{r+1}\,c_r}{2\,c_r\,c_{r+1}}; \\ \alpha_{r+1} &= \frac{a_r\,c_{r+1} - a_{r+1}\,c_r}{2\,c_r\,c_{r+1}}; & \beta_{r+1} &= \frac{b_r\,c_{r+1} - b_{r+1}\,c_r}{2\,c_r\,c_{r+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24).$$

Die numerische Auswertung wird erleichtert, wenn die konjugiert komplexen Zahlen a, b, c zur Bestimmung von α und β in ihren Real- und Imaginärteil aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} a_{r,r+1} &= a_R \pm a_J\, i, \\ b_{r,r+1} &= b_R \pm b_J\, i, \\ c_{r,r+1} &= c_R \pm c_J\, i. \end{aligned}$$

Damit gehen die Gl. (24) über in:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{a_R\,c_R + a_J\,c_J}{c_R^2 + c_J^2}, & \beta_r &= \frac{b_R\,c_R + b_J\,c_J}{c_R^2 + c_J^2}, \\ \alpha_{r+1} &= \frac{a_R\,c_J - a_J\,c_R}{c_R^2 + c_J^2}, & \beta_{r+1} &= \frac{b_R\,c_J - b_J\,c_R}{c_R^2 + c_J^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25).$$

Die Abklingungsfunktionen u_n und v_n lassen sich dann für komplexe Lösungen $\lambda_{r,r+1}$ folgendermaßen anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \sum_r y^{\xi_r}\left[(a_r C_r - a_{r+1} C_{r+1})\cos(\eta_r \ln y) + (a_{r+1} C_r + a_r C_{r+1})\sin(\eta_r \ln y)\right], \\ v_n &= \sum_r y^{\xi_r}\left[(\beta_r C_r - \beta_{r+1} C_{r+1})\cos(\eta_r \ln y) + (\beta_{r+1} C_r + \beta_r C_{r+1})\sin(\eta_r \ln y)\right] \end{aligned}\right\} \quad (20\,\text{b, c}).$$

C. Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes.

Der vollständige Ansatz (11) für die Schnittkräfte enthält zahlreiche Glieder, die für das Ergebnis keine Bedeutung besitzen und in Zukunft vernachlässigt werden. Damit entstehen nur Fehler in der Größenordnung von 0,1 bis 1 v. H.

Der verkürzte Ansatz (11) lautet

$$\left.\begin{aligned} N_y &= \bar{D}\left[y\,u' + \mu\,(u + v^{\cdot}\cot a + w\cot a)\right] - \bar{K}\,y^2 w''\cot^2 a, \\ N_\varphi &= \bar{D}\left[u + v^{\cdot}\cot a + w\cot a + \mu\, y\, u'\right], \\ N_{y\varphi} &= N_{\varphi y} = \frac{1-\mu}{2}\,\bar{D}\left[u^{\cdot}\cot a + y\,v' - v\right], \\ M_y &= \bar{K}\left[y^2 w'' + \mu\,(y\,w^{\cdot\cdot}\cot^2 a + y^2 w')\right], \\ M_\varphi &= \bar{K}\left[y\,w^{\cdot\cdot}\cot^2 a + y\,w\cot^2 a + y^2 w' + \mu\,y^3 w''\right], \\ M_{y\varphi} &= M_{\varphi y} = (1-\mu)\,\bar{K}\left[y^2 w^{\cdot\prime}\cot a - y\,w^{\cdot}\cot a\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26\,\text{a—f}).$$

Die Querkräfte folgen aus (2d, e) mit

$$\left.\begin{aligned} Q_y &= M_y' + \frac{1}{y}\,(M_y - M_\varphi + M_{y\varphi}^{\cdot}\cot a), \\ Q_\varphi &= M_{y\varphi}' + \frac{1}{y}\,(M_\varphi^{\cdot}\cot a + 2\,M_{y\varphi}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26\,\text{g, h}).$$

Hierzu treten bei einem kräftefreien Rande die beiden Kirchhoffschen Ersatzkräfte nach Abschnitt III D:

$$\left.\begin{aligned} S_{y\varphi} &= N_{y\varphi} - \frac{M_{y\varphi}}{y}\cot a, \\ T_y &= Q_y - \frac{M_{y\varphi}^{\cdot}}{y}\cot a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26\,\text{i, k}).$$

Die Schnittkräfte werden nach (26), die Verzerrungen der Mittelfläche nach (4) aus (20) abgeleitet. Von den Verschiebungen wird außer u, v, w meist nur noch w' gebraucht.

Für die Zahlenrechnung werden dimensionslose Koordinaten $\varrho = y/l_u$ mit $l_u \equiv y_u$ oder $\varrho = y/l_0$ mit $l_0 \equiv y_0$ verwendet, je nachdem Randstörungen untersucht werden, die vom unteren oder oberen Rande einer offenen Kegelschale ausgehen.

Aus diesem Grunde werden die Ansätze (20) und (26) mit

$$y = \varrho\, l, \qquad y\,(\cdots)' = \varrho\,(\cdots)^{\mathrm{I}}$$

auf die dimensionslose Koordinate ϱ umgestellt. Die beim Differentiieren entstehenden Ausdrücke für die Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes werden als Funktionen von ϱ und ϑ in Zahlentafel 1 vereinigt.

Die Beziehungen zwischen den Integrationskonstanten C_r für benannte und $\bar{C}_r$ für unbenannte Koordinaten sind:

$$\left.\begin{aligned} C_r &= l^{-\xi_r}\,(\bar{C}_r \cos(\eta_r \ln l) - \bar{C}_{r+1}\sin(\eta_r \ln l)), \\ C_{r+1} &= l^{-\xi_r}\,(\bar{C}_{r+1}\cos(\eta_r \ln l) + \bar{C}_r \sin(\eta_r \ln l)) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27);$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_r &= l^{\xi_r}\,(C_r \cos(\eta_r \ln l) + C_{r+1}\sin(\eta_r \ln l)), \\ \bar{C}_{r+1} &= l^{\xi_r}\,(C_{r+1}\cos(\eta_r \ln l) - C_r \sin(\eta_r \ln l)) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28).$$

D. Randbedingungen der genauen und der genäherten Lösung.

Die allgemeine Lösung der randbelasteten Kegelschale enthält 8 Integrationskonstanten zur Erfüllung von 4 Bedingungen an jedem Rande. Sie werden also aus einem System von 8 linearen Gleichungen berechnet. Der Spannungs- und Verschiebungszustand der geschlossenen Kegelschale ist durch die Integrationskonstanten $C_1^* - C_4^*$ bestimmt. Die Integrationskonstanten

Zahlentafel 1. Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes als Funktionen von ϱ.

Schnittkräfte $S^{\text{symm}}_{\text{antim}} = \frac{\cos}{\sin} n\vartheta \cdot J \sum_r \varrho^{p_r} [(f_r \overline{C}_r - f_{r+1} \overline{C}_{r+1}) \cos(\eta_r \ln \varrho) + (f_{r+1} \overline{C}_r + f_r \overline{C}_{r+1}) \sin(\eta_r \ln \varrho)]$

		J	p_r	f_r	f_{r+1}
N_y	$\cos n\vartheta$	$\overline{D}$	ξ'_r	$(\xi'_r + \mu) a_r + \eta_r a_{r+1} + \mu \frac{n}{\sin\alpha} \beta_r + \mu \cot\alpha + \overline{k} \cot\alpha (-\xi'^2_r + \xi'_r + \eta_r^2)$	$(\xi'_r + \mu) a_{r+1} - \eta_r a_r + \mu \frac{n}{\sin\alpha} \beta_{r+1} + \overline{k} \cot\alpha\, \eta_r (2\xi'_r - 1)$
N_φ	$\cos n\vartheta$	$\overline{D}$	ξ'_r	$(\mu \xi'_r + 1) a_r + \mu \eta_r a_{r+1} + \frac{n}{\sin\alpha} \beta_r + \cot\alpha$	$(\mu \xi'_r + 1) a_{r+1} - \mu \eta_r a_r + \frac{n}{\sin\alpha} \beta_{r+1}$
$N_{y\varphi}$	$\sin n\vartheta$	$\overline{D}$	ξ'_r	$\frac{1-\mu}{2}\left[(\xi'_r - 1)\beta_r + \eta_r \beta_{r+1} - \frac{n}{\sin\alpha} a_r\right]$	$\frac{1-\mu}{2}\left[(\xi'_r - 1)\beta_{r+1} - \eta_r \beta_r - \frac{n}{\sin\alpha} a_{r+1}\right]$
Q_y	$\cos n\vartheta$	$\overline{K}$	ξ'_r	$-\xi'_r\left[-\xi'^2_r - \xi'_r + 3(\eta_r^2 + 1 - \mu) + \frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right] - \eta_r^2 + \frac{n^2}{\sin^2\alpha}(2 - 3\mu) - \cot^2\alpha$	$-\eta_r\left[3(\xi'^2_r - (1-\mu)) + 2\xi'_r - \eta_r^2 - \frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right]$
Q_φ	$\sin n\vartheta$	$\overline{K}$	ξ'_r	$\frac{n}{\sin\alpha}\left[-\xi'_r(\xi'_r + 3(1-\mu)) + \eta_r^2 + 3(1-\mu) + \frac{n^2}{\sin^2\alpha} - \cot^2\alpha\right]$	$\frac{n}{\sin\alpha} \eta_r [2\xi'_r + 3(1-\mu)]$
M_y	$\cos n\vartheta$	$l\overline{K}$	$\xi'_r + 1$	$\xi'_r[\xi'_r - (1-\mu)] - \eta_r^2 - \mu \frac{n^2}{\sin^2\alpha}$	$-\eta_r[2\xi'_r - (1-\mu)]$
M_φ	$\cos n\vartheta$	$l\overline{K}$	$\xi'_r + 1$	$\xi'_r(\mu \xi'_r + 1 - \mu) - \mu \eta_r^2 - \frac{n^2}{\sin^2\alpha} + \cot^2\alpha$	$-\eta_r[2\mu \xi'_r + 1 - \mu]$
$M_{y\varphi}$	$\sin n\vartheta$	$l\overline{K}$	$\xi'_r + 1$	$-(1-\mu)\frac{n}{\sin\alpha}(\xi'_r - 1)$	$(1-\mu)\frac{n}{\sin\alpha} \eta_r$
$S_{y\varphi}$	$\sin n\vartheta$	$\overline{D}$	ξ'_r	$\frac{1-\mu}{2}\left[(\xi'_r - 1)\beta_r + \eta_r \beta_{r+1} - \frac{n}{\sin\alpha} a_r + 2(\xi'_r - 1) n \frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} \overline{k}\right]$	$\frac{1-\mu}{2}\left[(\xi'_r - 1)\beta_{r+1} - \eta_r \beta_r - \frac{n}{\sin\alpha} a_{r+1} - 2\eta_r n \frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} \overline{k}\right]$
T_y	$\cos n\vartheta$	$\overline{K}$	ξ'_r	$-\xi'_r\left[-\xi'^2_r - \xi'_r + 3(\eta_r^2 + 1 - \mu) + \mu \frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right] - \eta_r^2 + \frac{n^2}{\sin^2\alpha}(1 - 2\mu) - \cot^2\alpha$	$-\eta_r\left[3(\xi'^2_r - (1-\mu)) + 2\xi'_r - \eta_r^2 - \mu \frac{n^2}{\sin^2\alpha}\right]$

Verschiebungen $s^{\mathrm{symm}}_{\mathrm{antim}} = {\cos \atop \sin} n\vartheta \sum_r \varrho^{p_r} [(\mathfrak{g}_r \overline{C}_r - \mathfrak{f}_{r+1} \overline{C}_{r+1}) \cos(\eta_r \ln \varrho) + (\mathfrak{g}_{r+1} \overline{C}_r + \mathfrak{f}_r \overline{C}_{r+1}) \sin(\eta_r \ln \varrho)]$

u	$\cos n\vartheta$	ξ'_r	a_r	a_{r+1}
v	$\sin n\vartheta$	ξ'_r	β_r	β_{r+1}
w	$\cos n\vartheta$	ξ'_r	1	0
$w^{\mathrm{I}} = l\,w'$	$\cos n\vartheta$	$\xi'_r - 1$	ξ'_r	$-\eta_r$

Verzerrungen $\varepsilon_0{}^{\mathrm{symm}}_{\mathrm{antim}} = {\cos \atop \sin} n\vartheta \frac{1}{l} \sum_r \varrho^{p_r} [(\mathfrak{g}_r \overline{C}_r - \mathfrak{f}_{r+1} \overline{C}_{r+1}) \cos(\eta_r \ln \varrho) + (\mathfrak{g}_{r+1} \overline{C}_r + \mathfrak{f}_r \overline{C}_{r+1}) \sin(\eta_r \ln \varrho)]$

ε_{y_0}	$\cos n\vartheta$	$\xi'_r - 1$	$\xi'_r a_r + \eta_r a_{r+1}$	$\xi'_r a_{r+1} - \eta_r a_r$
ε_{φ_0}	$\cos n\vartheta$	$\xi'_r - 1$	$a_r + \frac{n}{\sin\alpha}\beta_r + \cot\alpha$	$a_{r+1} + \frac{n}{\sin\alpha}\beta_{r+1}$
$\gamma_{y\varphi_0}$	$\sin n\vartheta$	$\xi'_r - 1$	$(\xi'_r - 1)\beta_r + \eta_r \beta_{r+1} - \frac{n}{\sin\alpha} a_r$	$(\xi'_r - 1)\beta_{r+1} - \eta_r \beta_r - \frac{n}{\sin\alpha} a_{r+1}$

Anmerkung: Bei reellem λ_r ist $\xi'_r = \lambda'_r$, $\overline{C}_r = \overline{C}^*_r$, $\eta_r = \mathfrak{f}_{r+1} = 0$, $a_r = a_r/c_r$, $\beta_r = b_r/c_r$ zu setzen.

$C_5^* - C_8^*$ sind Null, damit die Verschiebungen und Schnittkräfte an der Kegelspitze verschwinden. Ausnahmen sind bei $n=0$ und $n=1$ möglich (vgl. Abschnitt IV B).

Die Abklingungszahlen $\lambda_{3,4}$ und $\lambda_{7,8}$ sind nach Abschnitt IV B im Regelfalle, verglichen mit $\lambda_{1,2}$ und $\lambda_{5,6}$, klein. Sie erzeugen Längsspannungen und dehnungslose Verbiegungen, die für $n \geq 2$ nicht mehr in reiner Form auftreten. Die Konstanten der Anteile 3,4 und 7,8 werden ebenfalls verhältnismäßig klein, so daß der Spannungs- und Verschiebungszustand in Randnähe mit großer Genauigkeit durch die großen Lösungsanteile 1,2 und 5,6 beschrieben wird. Der Abschnitt V 4 enthält den rechnerischen Nachweis. Der Unterschied in der Dämpfung der beiden einem Rande zugeordneten Anteile kehrt die Größenverhältnisse jedoch um, so daß die kleinen Anteile der Lösung im mittleren Schalenbereich überwiegen können und dort die Membranspannungen nur unerheblich verändern. Aus diesen Gründen genügen häufig die Anteile 1,2, so daß für jeden Rand nur 2 Konstanten bestimmt werden müssen. Das sind $C_{1,2}^*$ und $C_{5,6}^*$, mit denen dann die wesentlichen Randbedingungen erfüllt werden.

Der Verzicht auf die schwach gedämpften Anteile der Lösung führt zu einer weiteren Vereinfachung der Rechnung. Das Verhältnis $(l_u - l_0)/t_u$ ist bei den im Bauwesen verwendeten Schalen oft so groß, daß sich obere und untere Randstörung nicht mehr beeinflussen. In diesem Falle werden $C_{1,2}^*$ und $C_{5,6}^*$ unabhängig voneinander berechnet. Die Brauchbarkeit einer Näherungslösung läßt sich abschätzen. Hierzu dient außer $(l_u - l_0)/t_u$ die Randwellenlänge L der Abklingungsfunktion der höchsten vorkommenden Harmonischen. Die Randstörungen gelten als unabhängig, wenn $(l_u - l_0)/t_u > 50$ oder wenn $(l_u - l_0) > L \div 2L$. Die Amplituden sind dann auf weniger als $1/500$ ihrer Randwerte abgeklungen.

Die Erfüllung der statischen Randbedingungen bei einem kräftefreien Rande gelingt nicht ohne weiteres, da 4 Integrationskonstanten in die 5 Bedingungsgleichungen

$$N_y = N_{y\varphi} = Q_y = M_y = M_{y\varphi} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (29)$$

eingehen würden. Diese Schwierigkeit ist durch G. Kirchhoff beseitigt worden, der die 3 Schnittkräfte $N_{y\varphi}$, Q_y und $M_{y\varphi}$ nach (26i, k) zur Ersatzschubkraft $S_{y\varphi}$ und Ersatzquerkraft T_y zusammenfaßte. Die Kräftegruppe $S_{y\varphi}$, T_y ist zur Kräftegruppe $N_{y\varphi}$, Q_y, $M_{y\varphi}$ äquivalent und hat nur in einer Zone von der Breite t eine andere Wirkung als diese.

Daher gilt nunmehr für den kräftefreien Rand:

$$N_y = S_{y\varphi} = T_y = M_y = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (30).$$

IV. Diskussion des Ergebnisses.

A. Angenäherte Berechnung der Wurzeln der charakteristischen Gl. (16).

Die Einführung von Zahlen in die charakteristische Gl. (16) zeigt, daß oft ihre strenge Auflösung entbehrt werden kann.

Die Querzahl μ besitzt erfahrungsgemäß keinen großen Einfluß. Es genügt daher, sie in den wichtigsten Anteilen der Koeffizienten g_8 bis g_0 zu berücksichtigen, nämlich in den mit der großen Zahl $1/\bar{k}$ multiplizierten Summanden.

Die Beiwerte g_4, g_2, g_0 sind außerdem viel größer als g_6, so daß die Wurzeln λ angenähert aus den folgenden zwei quadratischen Gleichungen für λ^2 berechnet werden können:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^4 + g_6 \lambda^2 + g_4 &= 0 \\ \lambda^4 + \frac{g_2}{g_4} \lambda^2 + \frac{g_0}{g_4} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . .} \quad (31\,\text{a, b}).$$

Die Gl. (31a) liefert die vier großen Wurzeln $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{5,6}$, die Gl. (31b) die vier kleinen Wurzeln $\lambda_{3,4}$, $\lambda_{7,8}$. Sie erfüllen die charakteristische Gl. (16) um so genauer, je mehr das Produkt der Gl. (31) mit dieser übereinstimmt.

Die Diskriminante der Gl. (31a) für die großen Eigenwerte

$$\Delta_1 = \frac{g_6^2}{4} - g_4 \quad \text{. . . . .} \quad (32)$$

ist, abgesehen von Ausnahmefällen bei Kegeln mit sehr großem Öffnungswinkel, negativ und liefert dann komplexe Abklingungszahlen. Dagegen wird die Diskriminante der Gl. (31b) für die kleinen Eigenwerte

$$\Delta_3 = \frac{g_2^2}{4\,g_4^2} - \frac{g_0}{g_4} \quad \text{. . . . .} \quad (33)$$

je nach der Belastungsfunktion (n) und den geometrischen Verhältnissen $(\bar{k}, a)$ kleiner oder größer als Null und löst Störungsfunktionen mit oder ohne Vorzeichenwechsel aus.

Die Kurven in Bild 8 beschreiben bei den Harmonischen $n=2$ bis $n=5$ die Abhängigkeit zwischen a und t' für die Bedingung $\Delta_3 = 0$ mit $\mu = 0$ und damit den Übergang von der

aperiodischen zur periodischen Schwingung der vier kleinen Glieder 3, 4 und 7, 8 der Abklingungsfunktion. Die graphischen Beziehungen zwischen a und t' bei vorgeschriebenem n unterteilen also die Kegelschalen mit reellen und komplexen Wurzeln $\lambda_{3,4,7,8}$. Kegelschalen mit komplexen Wurzeln sind Punkte im oberen Bereiche zugeordnet.

Die Angaben im Abschnitt IV B mit den Bildern 9 bis 12 zeigen den Grad der Annäherung für λ mit (31a, b) an die strenge Lösung für λ mit (16). Die Näherung ist danach bei den niedrigen Harmonischen, mittleren Öffnungs- und kleinen Leibungswinkeln gut. Sie versagt bei flachen Kegelschalen und wird nach Bild 12 um so besser, je mehr der Kegelstumpf in den Zylinder übergeht. Das Kriterium $\Delta_3 = 0$ für die reelle oder komplexe Form der kleinen Wurzeln $\lambda_{3,4,7,8}$ ist also bei den plattenähnlichen Kegelschalen unbrauchbar, während es mit wachsendem Basiswinkel immer schärfer wird.

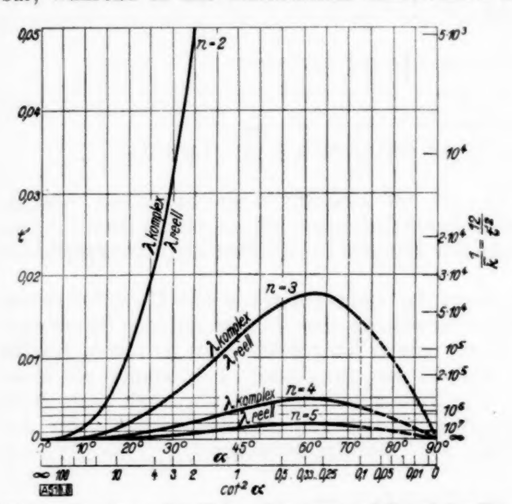


Bild 8. Die Form der kleinen Lösungen auf Grund der Bedingung $\Delta_3 = 0 \cdot (\mu = 0)$.

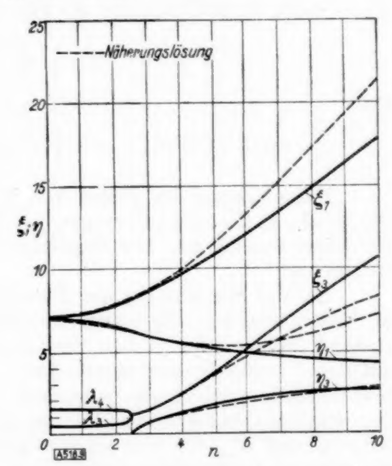


Bild 9. Abhängigkeit der Abklingungszahlen λ von den Gliedern n der harmonischen Reihe. $a = 45^0$, $\delta = 0{,}034641$ $(k^{-1} = 10^4)$, $\mu = 0$.

B. Abhängigkeit zwischen der Abklingung der Randstörungen und den Konstanten n, a, t', μ der Lösung.

Der Einfluß der Ordnung n der Belastung und der geometrischen und elastischen Eigenschaften a, t', μ der Kegelschale auf die Randstörungen wird durch Schaulinien geklärt. Ihre charakteristischen Eigenschaften bleiben, wie sich durch zahlreiche Untersuchungen gezeigt hat, bei anderen Konstanten der Kegelschale erhalten.

1. Einfluß der Lastwechselzahl n.

Bild 9 zeigt die Funktion $\lambda = f(n)$. Die Sonderfälle $n = 0$ und $n = 1$ führen zu den reellen Wurzeln $\lambda_{3,7} = \pm 1/2$ und $\lambda_{4,8} = \pm 3/2$ der charakteristischen Gl. (16) und damit zu den folgenden Exponenten $\lambda'_{3,4}$, $\lambda'_{7,8}$ in (18):

r	3	4	7	8
λ	$+1/2$	$+3/2$	$-1/2$	$-3/2$
λ'	0	$+1$	-1	-2

Die Exponenten $\lambda'_3 = 0$ und $\lambda'_4 = +1$ kennzeichnen verformungslose Bewegungen [3]. $\lambda'_7 = -1$ und $\lambda'_8 = -2$ sind die Exponenten des Ansatzes (14) für singuläre, in der Kegelspitze angreifende Einzelkräfte P und Punktmomente M. Die Konstanten C^*_7, C^*_8 sind dann allein von der Intensität dieser Kräfte abhängig und können gegebenenfalls aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.

a) Rotationssymmetrie des Spannungs- und Verschiebungszustandes mit $n = 0$.

Der Exponent $\lambda'_3 = 0$ bedeutet eine Verschiebung der Schale in Richtung der Kegelachse mit

$$u = A^*_3, \quad v = 0, \quad w = -A^*_3 \tan a,$$

der Exponent $\lambda'_4 = +1$ eine Drehung um die Kegelachse mit

$$u = 0, \quad v = B^*_4 y, \quad w = 0.$$

$\lambda_7' = -1$ beschreibt die Abklingung bei einer Einzelkraft P in der Drehachse, $\lambda_8' = -2$ die Abklingung bei einem Punktmoment M um die Drehachse. Sie erzeugen Spannungszustände ohne Biegung. Die Lösungen mit λ_4' und λ_8' lassen sich nicht durch den Fourieransatz (13) angeben, sondern werden erst nach Vertauschung der Funktionen sin und cos erhalten.

Division der vollständigen Hauptgleichung (16) durch die vier reellen Eigenwerte liefert die Gl. (34) zur Bestimmung der Abklingungszahlen $\lambda_{1,2}$ und $\lambda_{5,6}$ für die Biegung am oberen und unteren Rande:

$$\lambda^4 - \left[\frac{9}{2} - 2\mu(2+\cot^2\alpha)\right]\lambda^2 + \left[\frac{1-\mu^2}{k}\cot^2\alpha + \frac{65}{16} - 7\mu + 3\mu^2 - \left(4 - \frac{7}{2}\mu\right)\cot^2\alpha + \cot^4\alpha\right] = 0 \quad (34).$$

Die Wurzeln sind, falls nicht ganz flache Kegelschalen untersucht werden, komplex mit $\lambda_{1,2} = +\xi \pm i\eta$ und $\lambda_{5,6} = -\xi \pm i\eta$. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma+\tau)}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{1}{2}(-\sigma+\tau)}, \\ &\text{und} \\ &\sigma = \frac{9}{4} - \mu(2+\cot^2\alpha), \qquad \tau = \sqrt{\left[\frac{1-\mu^2}{k} - 4 + \frac{7}{2}\mu + \cot^2\alpha\right]\cot^2\alpha + \frac{65}{16} - 7\mu + 3\mu^2} \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

Diese Lösung ist zuerst von E. Meißner [4] auf anderem Wege entwickelt worden. Sie erscheint dort gekürzt wegen der Loveschen Vereinfachungen [5], auf die in dieser Arbeit verzichtet worden ist. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur in Gliedern von untergeordneter Bedeutung.

Bei der Berechnung der Randstörungen kann der Lösungsanteil 3 mit C_3^*, λ_3' meist vernachlässigt werden. Er ist als formänderungslose Bewegung ohne Einfluß auf den Spannungszustand und bei der großen Steifigkeit der Schale gegen Längskräfte von geringem Einfluß auf den Verschiebungszustand. Der Anteil 4 scheidet aus, die Anteile 7, 8 können als Membranzustände unabhängig behandelt werden. Die Konstanten $C_{3,4}^*$ und $C_{7,8}^*$ sind daher Null. Zur mathematischen Formulierung der Randbedingungen dienen also lediglich $C_{1,2}^*$ für den unteren und $C_{5,6}^*$ für den oberen Rand, die mit den Abklingungszahlen $\lambda_{1,2,5,6} = \pm(\xi \pm i\eta)$ die Störungsfunktion bestimmen.

Das Verhältnis $A_r^*/C_r^* = a_r/c_r$ wird mit der Vereinfachung

$$a_r = -d_{AC}, \quad c_r = d_{AA} \qquad (r = 1, 2, 5, 6)$$

berechnet.

b) $n = 1$.

Der Exponent $\lambda_3' = 0$ bedeutet eine Verschiebung winkelrecht zur Kegelschale, parallel zur Meridianebene $\vartheta = 0$ mit

$$u = -B_3^*\sin\alpha, \quad v = B_3^*, \quad w = -B_3^*\cos\alpha,$$

während $\lambda_4' = +1$ die Drehung um die Normale durch die Kegelspitze zur Meridianebene $\vartheta = 0$ beschreibt. Hierbei ist

$$u = 0, \quad v = -C_4^*\cos\alpha \cdot y, \quad w = C_4^* \cdot y.$$

$\lambda_7' = -1$ und $\lambda_8' = -2$ führen bei einer waagerechten Einzelkraft P in der Nullmeridianebene und einem Kräftepaar M mit waagerechtem Vektor in der 90°-Meridianebene zu Membranspannungen. Die übrigen 4 Eigenwerte sind in folgender Gleichung enthalten:

$$\lambda^4 - \left[\frac{17}{2} - 4\mu + 2(2-\mu)\cot^2\alpha\right]\lambda^2 + \left[\left(\frac{1-\mu^2}{k} + 9 - \frac{17}{2}\mu + \cot^2\alpha\right)\cot^2\alpha + \frac{273}{16} - 19\mu + 3\mu^2\right] = 0 \quad (36).$$

Real- und Imaginärteil ihrer Lösungen $\lambda_{1,2} = +\xi \pm i\eta$, $\lambda_{5,6} = -\xi \pm i\eta$ sind:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma+\tau)}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{1}{2}(-\sigma+\tau)}, \qquad \sigma = \frac{17}{4} - 2\mu + (2-\mu)\cot^2\alpha, \\ &\tau = \sqrt{\left(\frac{1-\mu^2}{k} + 9 - \frac{17}{2}\mu\right)\cot^2\alpha + (4-3\mu^2)\cot^4\alpha + \frac{273}{16} - 15\mu + 3\mu^2} \end{aligned}\right\} \quad (37).$$

Die Anteile 3, 4, 7, 8 der Lösung scheiden ebenso wie bei $n = 0$ für die Randbedingung aus, so daß deren Berechnung wiederum allein mit den Anteilen 1, 2 und 5, 6 erfolgt.

2. Einfluß des Leibungswinkels $t' = \sqrt{12\,\bar{k}}$ und der Querzahl μ.

Bild 10 zeigt die Funktion $\lambda = f(t')$. Der Einfluß der Querzahl μ läßt sich mit großer Genauigkeit nach Abschnitt IV A durch eine Abänderung von $\bar{k}$ beschreiben. μ besitzt durch die Verkoppelung $\frac{1-\mu^2}{\bar{k}}$ mit $\bar{k}$ denselben Einfluß auf die Abklingungszahlen wie t'.

3. Einfluß des Kegelöffnungswinkels 2α nach Bild 11.

Alle Eigenwerte erhalten bei flachen Kegelschalen eine Größenordnung, so daß die Näherungsansätze (31) versagen.

C. Grenzübergänge gegen Platte und Zylinder.

Kreisplatte mit $t = t' \cdot y$ und Zylinderschale mit $t = \text{const}$ sind Sonderfälle des Problems und daher in dem allgemeinen Ansatz enthalten. Die Eigenwerte für die Kreisplatte entstehen mit $\cot\alpha = 0$ bei beliebigem n aus (16), für $n = 0$ aus (35) und für $n = 1$ aus (37).

Der Übergang von der Platte über die Kegelschale zum Zylinder im Sinne von Bild 12 schließt den Potenzansatz (14) aus, da α gegen Null geht, so daß ein Grenzübergang auf den Exponentialansatz e^x der Lösung für den Zylinder nötig ist. Er lautet mit Bild 13:

$$\left.\begin{aligned} w_k &= C_k^* \cdot y^{\lambda_k'} = C_k^* (x + a\cot\alpha)^{\lambda_k - 1/2}, \\ C_k^* &= C_k' \left(\frac{\tan\alpha}{a}\right)^{\lambda_k} (x + a\cot\alpha)^{+1/2}, \\ w_k &= C_k' \left[\left(1 + \frac{x/a}{\cot\alpha}\right)^{\cot\alpha}\right]^{\lambda_k \tan\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (38).$$

Mit

$$\lim_{\alpha \to 0}\left[1 + \frac{x/a}{\cot\alpha}\right]^{\cot\alpha} = e^{x/a}$$

entsteht der Zylinderansatz:

$$\lim_{\alpha \to 0} w_k = w_z = C_z \cdot e^{x/a \cdot \lambda_z}.$$

Daher ist

$$\lim_{\alpha \to 0} C_k' = C_z \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to 0} \lambda_k \tan\alpha = \lambda_z \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (39).$$

Der Grenzübergang auf den Zylinder bildet die Kontrolle der Hauptgleichung (16) und der Sonderlösungen (35) und (37). Die Gl. (16) für die Kegelschale geht mit

$$\lim_{\alpha \to 0} \lambda_k = \lambda_z \cot\alpha \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to 0} \bar{k}_k = k_z \tan^2\alpha, \quad k_z = t^2/12\,a^2,$$

in die folgende, ihr zugeordnete Hauptgleichung für die Zylinderschale über:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_z^8 - 2\,(2\,n^2 - \mu)\,\lambda_z^6 + \left[\frac{1-\mu^2}{k_z} + 6\,n^2\,(n^2-1) + 1\right]\lambda_z^4 - \\ &- 2\,n^2\,[2\,n^4 - (4-\mu)\,n^2 + (2-\mu)]\,\lambda_z^2 + n^4\,(n^2-1)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40).$$

$n = 0$ liefert nach (35) die Eigenwerte $\lambda_z = \pm\,\xi_z \pm i\,\eta_z$ mit

$$\xi_z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\mu + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{k_z} + 1}\right)}, \qquad \eta_z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(+\mu + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{k_z} + 1}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; (41).$$

$n = 1$ liefert nach (37)

$$\xi_z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2 - \mu + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{k_z} + 4 - 3\,\mu^2}\right)}, \quad \eta_z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-(2-\mu) + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{k_z} + 4 - 3\,\mu^2}\right)} \quad (42).$$

Die Ergebnisse stimmen bis auf die sehr kleinen zu vernachlässigenden Glieder mit den Lösungen der Spannungstheorie der Zylinderschale [6] überein.

D. Wellenlänge und Dämpfung der periodischen Abklingungsfunktion.

Der Verlauf einer beliebigen Schnittgröße S über den Meridian nach Zahlentafel 1 ist

$$S = J \sum_{r=1,3,5,7} \varrho^{p_r}\,[(f_r\,\bar{C}_r - f_{r+1}\,\bar{C}_{r+1})\cos(\eta_r \ln\varrho) + (f_{r+1}\,\bar{C}_r + f_r\,\bar{C}_{r+1})\sin(\eta_r \ln\varrho)] \quad . \; . \; (43).$$

Die Funktion läßt sich mit $\bar{C}_r = G_r \sin\gamma_r$, $\bar{C}_{r+1} = G_r \cos\gamma_r$ umformen:

$$S = J \sum \varrho^{p_r}\, G_r\,[f_r \sin(\eta_r \ln\varrho + \gamma_r) - f_{r+1}\cos(\eta_r \ln\varrho + \gamma_r)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44).$$

Die Summe der beiden trigonometrischen Funktionen läßt sich nun durch die Phasenverschiebung χ_r in eine reine Sinusfunktion verwandeln:

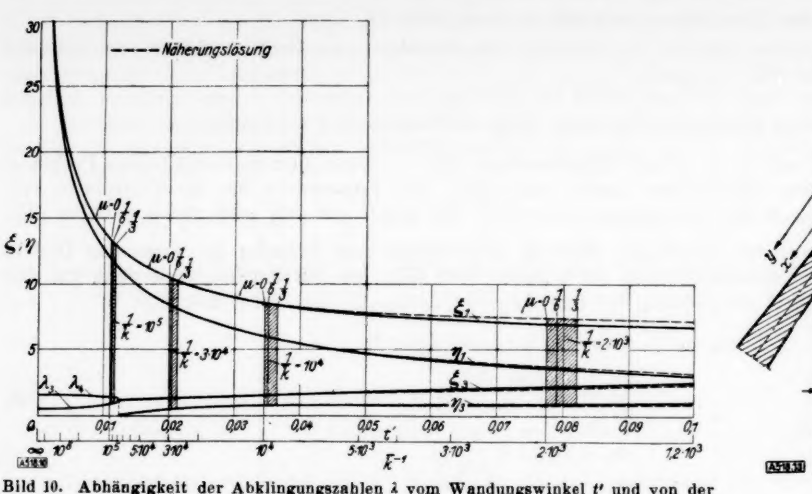


Bild 10. Abhängigkeit der Abklingungszahlen λ vom Wandungswinkel t' und von der Querzahl μ ($n = 3$, $\alpha = 45°$).

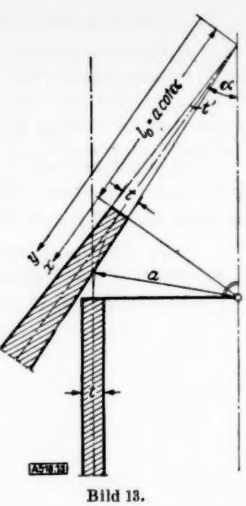


Bild 13.

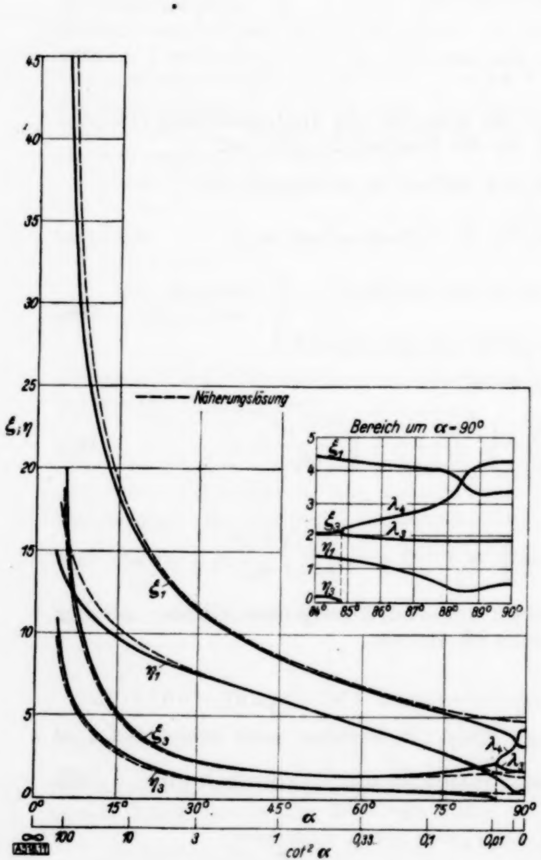


Bild 11. Abhängigkeit der Abklingungszahlen λ vom Kegelöffnungswinkel 2α,

$n = 3, \quad \delta = 0{,}034641\ (\bar{k}^{-1} = 10^4), \quad \mu = 0.$

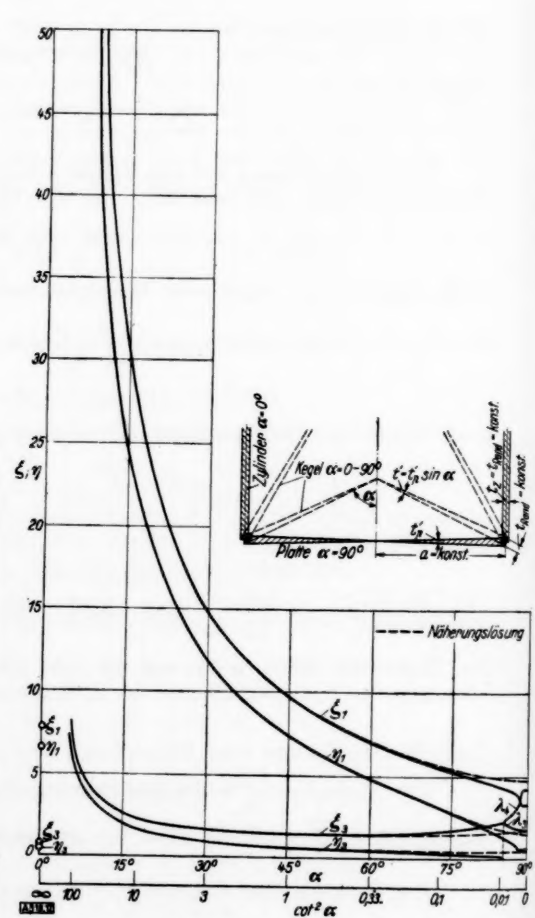


Bild 12. Verlauf der Abklingungszahlen beim Übergang vom Zylinder zur Platte.

$n = 3, \quad \delta_p = 0{,}034641\ (\bar{k}^{-1} = 12\,\frac{a^2}{t^2} = 10^4), \quad \mu = 0.$

$$S = J \sum_{r=1,3,5,7} G_r F_r \varrho^{p_r} \sin(\eta_r \ln \varrho + \gamma_r + \chi_r) \quad \ldots \ldots \quad (45);$$

dabei ist

$$\tan \chi_r = -\frac{f_{r+1}}{f_r}, \quad F_r = \frac{f_r}{\cos \gamma_r} = -\frac{f_{r+1}}{\sin \chi_r}.$$

Hieraus entstehen für die Wellenlänge L_r und das Verhältnis ν_r zweier aufeinanderfolgender Amplituden einer e i n z e l n e n Schwingung r einfache Ausdrücke.

Bezeichnen $\begin{matrix}\varrho_{u,m}, \varrho_{u,m+1} \\ \varrho_{o,m}, \varrho_{o,m+1}\end{matrix}$ die Orte zweier aufeinanderfolgender Nullpunkte oder Amplituden eines Anteils r der Abklingungsfunktion vom $\begin{matrix}\text{Unter} \\ \text{Ober}\end{matrix}$rande, und damit $\begin{matrix} l_u(\varrho_{u,m} - \varrho_{u,m+1}) \\ l_o(\varrho_{o,m+1} - \varrho_{o,m})\end{matrix}$ die halben Wellenlängen, so ist bei einer

Abklingung vom Unterrande $(r = 1, 3)$:

$$\frac{\varrho_{u,m}}{\varrho_{u,m+1}} = e^{\pi/\eta_r}; \; \varrho_{u,m} - \varrho_{u,m+1} = \varrho_{u,m}(1 - e^{-\pi/\eta_r}),$$

Abklingung vom Oberrande $(r = 5, 7)$:

$$\frac{\varrho_{o,m+1}}{\varrho_{o,m}} = e^{\pi/\eta_r}; \; \varrho_{o,m+1} - \varrho_{o,m} = \varrho_{o,m}(e^{\pi/\eta_r} - 1).$$

Die Wellenlänge ist demnach proportional zum Abstande von der Kegelspitze:

$$L_u = 2\, l_u(\varrho_{u,m} - \varrho_{u,m+1}),$$
$$L_o = 2\, l_o(\varrho_{o,m+1} - \varrho_{o,m}).$$

Sie beträgt bei einer

$$\left.\begin{aligned} &\text{Abklingung vom Unterrande } (r = 1, 3)\text{:} \quad L_u = 2\, l_u \varrho_{u,m}(1 - e^{-\pi/\eta_r}) = 2\, y_m(1 - e^{-\pi/\eta_r}), \\ &\text{Abklingung vom Oberrande } (r = 5, 7)\text{:} \quad L_o = 2\, l_o \varrho_{o,m}(e^{\pi/\eta_r} - 1) \;\; = 2\, y_m(e^{\pi/\eta_r} - 1) \end{aligned}\right\} \quad (46).$$

Das Verhältnis ν_r zweier aufeinanderfolgender Amplituden (verschiedenen Vorzeichens) ist

$$\nu_r = e^{\pi \frac{p_r}{\eta_r}} \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

mit $p_r = \xi_r, \xi_r' + 1, \xi_r' - 1$ nach Zahlentafel 1.

V. Spannungszustand in einem kegelförmigen Kühlturme für Eigengewicht und Wind.

Die Abmessungen der Kegelschale mit dem Meridianschnitt Bild 14 sind nach einem vorhandenen Kühlturme festgelegt worden, der im vorliegenden Falle im Unterbau elastisch eingespannt sein würde. Die Schnittkräfte werden daher durch die Ergebnisse bei frei drehbarer Lagerung und starrer Einspannung eingegrenzt. Die langwelligen Lösungsanteile 3, 4, die nach Zahlentafel 3 über die ganze Schale reichen, werden vernachlässigt. Die Störungen am unteren Rande lassen sich daher für

$$(l_u - l_o)/t_u = 138{,}6 > 50 \quad \text{und} \quad (l_u - l_o) = 52{,}7\ m > 2\, L_{n=3} = 27{,}8\ m$$

unabhängig von den Bedingungen am oberen Rande berechnen. Die Integrationskonstanten $C_5 - C_8$ sind bei einem kräftefreien oberen Rande Null.

1. Geometrische Grundlagen und Material.

$$l_u = 126{,}68\ m; \quad \alpha = 9^\circ\,20', \quad t' = 0{,}00300.$$
$$E = 2'100'000\ t/m^2, \quad \mu = 1/6.$$
$$\bar{k} = \frac{t'^2}{12} = 7{,}5000 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{1}{\bar{k}} = 1'333'333.$$
$$\bar{D} = \frac{E\,t'}{1-\mu^2} = 6'125{,}000, \quad \bar{K} = \frac{E\,t'^3}{12\,(1-\mu^2)} = 4{,}59375 \cdot 10^{-3}.$$

2. Die von der Belastung unabhängigen Zahlenwerte für $n = 0$ bis $n = 3$.

a) Die kleinen Anteile 3, 4 der Lösungen für $n = 2$ und $n = 3$ erzeugen nach Bild 8 periodische Abklingungsfunktionen. Die Abklingungszahlen für $n = 0$, $n = 1$ werden nach (35) und (37), die Abklingungszahlen für $n = 2$, $n = 3$ nach (16) streng berechnet und in Zahlentafel 2 mit den Ergebnissen des Näherungsverfahrens (31) verglichen.

Zahlentafel 2.

n		ξ_1	η_1	ξ_3 bzw. $\lambda_{2,3}$	η_3
0		58,827	58,864	1,5/0,5	—
1		59,151	58,541	1,5/0,5	—
2	genau	60,136	57,590	1,478	0,923
	genähert	60,143	57,586	1,410	0,808
3	genau	61,842	56,089	2,974	2,505
	genähert	61,855	56,080	2,966	2,496

Zahlentafel 3.

n	r	$L_r(m)$	ν_r
0	1	13,2	22,5
1	1	13,4	23,2
2	1	13,7	25,9
	3	245,0	27,9
3	1	13,9	31,0
	3	181,2	22,2

b) Die Wellenlänge L_r und das Verhältnis ν_r der Schwingungsweiten werden mit (46) und (47) in Zahlentafel 3 angeschrieben.

c) Die Faktoren f_r, f_{r+1} $(r=1,3)$ werden nach Zahlentafel 1 berechnet.

3. Schnittkräfte für Eigengewicht mit $\gamma = 2{,}4\,\mathrm{t/m^3}$.

a) Membranzustand für die äußeren Kräfte.

$$N_y = -\frac{\gamma\, t'}{3\cos\alpha}\, y^2\left(1 - \frac{l_0^3}{y^3}\right), \qquad N_\varphi = -\gamma\, t' \sin\alpha \cdot \tan\alpha \cdot y^2,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E\,t}(N_\varphi - \mu\, N_y) = -\frac{\gamma}{3E}\frac{1}{\cos\alpha}\left[(3\sin^2\alpha - \mu)\, y + \mu\,\frac{l_0^3}{y^2}\right],$$

$$w' = [(y\,\varepsilon_\varphi)' - \varepsilon_y]\tan\alpha = -\frac{\gamma}{3E}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\left[(3\,(2+\mu)\sin^2\alpha - 1 - 2\mu)\, y + (1-\mu)\frac{l_0^3}{y^2}\right].$$

Bild 15 zeigt u. a. die Schaulinien der Membrankräfte.

Die Randwerte von Ringdehnung und Meridianverdrehung sind:

$$\varepsilon_\varphi = +2{,}667 \cdot 10^{-6}, \qquad w' = +8{,}010 \cdot 10^{-6}.$$

b) Biegezustand durch Randbelastung.

Als Randbedingungen werden bei frei drehbarer, aber unverschieblicher Lagerung $\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_{\varphi\,\mathrm{Membran}}$, $M_y = 0$, bei starrer Einspannung $\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_{\varphi\,\mathrm{Membran}}$, $w' = -w'_{\mathrm{Membran}}$ vorgeschrieben. Damit entstehen die Integrationskonstanten $\bar{C}_r$ der Zahlentafel 4.

Zahlentafel 4.

Lagerung		gelenkig (II)	eingespannt (III)
Randbedingungen	1.	$\varepsilon_\varphi = -2{,}667 \cdot 10^{-6}$	
	2.	$M_y = 0$	$w' = -8{,}010 \cdot 10^{-6}$
$\bar{C}_1$		$-5{,}561 \cdot 10^{-5}$	$-5{,}567 \cdot 10^{-5}$
$\bar{C}_2$		$-9{,}086 \cdot 10^{-7}$	$+3{,}793 \cdot 10^{-5}$

Zahlentafel 1 liefert außerdem die Abklingungsfunktionen der Komponenten des Spannungszustandes.

c) Überlagerung von Membran- und Biegezustand.

Mit den Schnittkräften des Bildes 14 erfüllt die Schale die Auflagerbedingungen $\varepsilon_\varphi = 0$, $M_y = 0$ bei gelenkigem Anschluß und die Auflagerbedingungen $\varepsilon_\varphi = 0$, $w' = 0$ bei starrer Einspannung.

4. Schnittkräfte unter dem Strömungswiderstand der Schale bei Wind mit dem Staudruck $p_w = 110\,\mathrm{kg/m^2}$.

Die Druckverteilung p_z über den Breitenschnitt ist nach Bild 16 in Anlehnung an die Göttinger Versuche über den Strömungswiderstand von zylindrischen Baukörpern gewählt worden:

$$p_z(\vartheta) = [-0{,}50 + 0{,}50\cos\vartheta + 0{,}85\cos 2\vartheta + 0{,}15\cos 3\vartheta] \cdot p_{z_0}.$$

Die Druckverteilung p_{z_0} über den Meridian ist mit $p_{z_0}(\alpha) = p_w \cos^2\alpha$ konstant. Äußere Kräfte sind demnach:

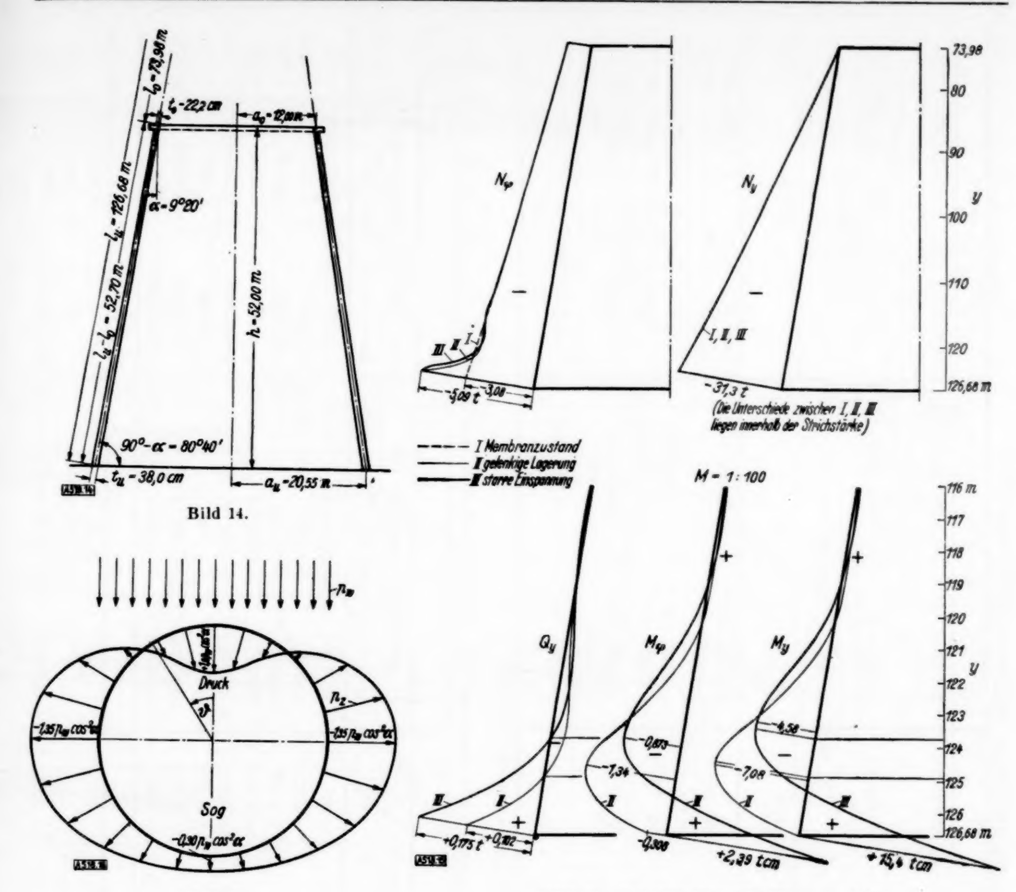


Bild 14.

Bild 16.

Bild 15. Schnittkräfte für Eigengewicht.

$$p_z = [-0{,}50 + 0{,}50\cos\vartheta + 0{,}85\cos 2\vartheta + 0{,}15\cos 3\vartheta]\cdot p_w \cos^2\alpha, \qquad p_y = p_\varphi = 0;$$

$$p_z = \sum_{n=0}^{n=3} Z_n \cos n\vartheta; \qquad Z_n = \mathfrak{w}_n\, p_w \cos^2\alpha.$$

a) Membranzustand für die äußeren Lasten.

Die inneren Kräfte sind mit den Bedingungen $N_{y\,n} = N_{y\varphi\,n} = 0$ am oberen Rande $y = l_0$:

$$N_y = \sum_{n=0}^{n=3} N_{y\,n}\cos n\vartheta; \qquad N_\varphi = \sum_{n=0}^{n=3} N_{\varphi\,n}\cos n\vartheta; \qquad N_{y\varphi} = \sum_{n=1}^{n=3} N_{y\varphi\,n}\sin n\vartheta.$$

$$N_{y\,n} = +\frac{Z_n}{6\sin\alpha\cos\alpha}\, y\left[(n^2 - 3\sin^2\alpha) - 3(n^2 - \sin^2\alpha)\frac{l_0^2}{y^2} + 2n^2\frac{l_0^3}{y^3}\right],$$

$$N_{\varphi\,n} = -y\, Z_n \tan\alpha,$$

$$N_{y\varphi\,n} = -\frac{n Z_n}{3\cos\alpha}\, y\left(1 - \frac{l_0^3}{y^3}\right).$$

Bild 17 enthält die Schaulinien der summierten Membrankräfte. Am Unterrande entsteht für die Harmonische n die Ringdehnung

$$\varepsilon_{\varphi\,n} = -\frac{1}{Et'}\,\frac{Z_n}{6\sin\alpha\cos\alpha}\left[(3(2-\mu)\sin^2\alpha + \mu n^2) - 3\mu(n^2 - \sin^2\alpha)\frac{l_0^2}{l_u^2} + 2\mu\, n^2\frac{l_0^3}{l_u^3}\right],$$

und mit $u = v = v' = 0$ die Meridiandrehung

$$w' = -\frac{1}{6Et'} Z_n \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[(1+\mu)(n^2 + 3\sin^2\alpha) - 3(1-\mu)(n^2 - \sin^2\alpha)\frac{l_0^2}{l_u^2} + 2(1-2\mu)n^2\frac{l_0^3}{l_u^3}\right].$$

Zahlentafel 5. Integrationskonstanten der Randstörungen infolge Wind.

		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$*)		$n = 3$*)	
Lagerung		gelenkig (II)	eingespannt (III)	gelenkig (II)	eingespannt (III)	gelenkig (II)	eingespannt (III)	gelenkig (II)	eingespannt (III)
Randbedingungen = negative Membranrandwerte	1.	$\varepsilon_\varphi = -1{,}321 \cdot 10^{-6}$		$\varepsilon_\varphi = +1{,}874 \cdot 10^{-6}$		$\varepsilon_\varphi = +6{,}009 \cdot 10^{-6}$		$\varepsilon_\varphi = 1{,}891 \cdot 10^{-6}$	
	2.	$M_y = 0$	$w' = -0{,}1667 \cdot 10^{-6}$	$M_y = 0$	$w' = +1{,}010 \cdot 10^{-6}$	$M_y = 0$	$w' = +6{,}018 \cdot 10^{-6}$	$M_y = 0$	$w' = +2{,}327 \cdot 10^{-6}$
	3.	—		—		$u = 0$ (—)		$u = 0$ (—)	
	4.	—		—		$v = 0$ (—)		$v = 0$ (—)	
$\overline{C}_1$		$-2{,}754 \cdot 10^{-5}$	$-2{,}757 \cdot 10^{-5}$	$+3{,}908 \cdot 10^{-5}$	$+3{,}869 \cdot 10^{-5}$	$+1{,}252 \cdot 10^{-4}$ $(+1{,}252 \cdot 10^{-4})$	$+1{,}201 \cdot 10^{-4}$ $(+1{,}199 \cdot 10^{-4})$	$+3{,}894 \cdot 10^{-5}$ $(+3{,}904 \cdot 10^{-5})$	$+3{,}560 \cdot 10^{-5}$ $(+3{,}573 \cdot 10^{-5})$
$\overline{C}_2$		$-4{,}499 \cdot 10^{-7}$	$+2{,}697 \cdot 10^{-5}$	$+2{,}428 \cdot 10^{-7}$	$-3{,}658 \cdot 10^{-5}$	$-3{,}021 \cdot 10^{-6}$ $(-3{,}025 \cdot 10^{-6})$	$-1{,}104 \cdot 10^{-4}$ $(-1{,}109 \cdot 10^{-4})$	$-2{,}874 \cdot 10^{-6}$ $(-2{,}906 \cdot 10^{-6})$	$-3{,}326 \cdot 10^{-5}$ $(-3{,}382 \cdot 10^{-5})$
$\overline{C}_3$		—	—	—	—	$-6{,}330 \cdot 10^{-8}$ (0)	$+5{,}058 \cdot 10^{-6}$ (0)	$+4{,}221 \cdot 10^{-7}$ (0)	$+3{,}740 \cdot 10^{-6}$ (0)
$\overline{C}_4$		—	—	—	—	$-2{,}281 \cdot 10^{-5}$ (0)	$-4{,}769 \cdot 10^{-5}$ (0)	$-5{,}216 \cdot 10^{-6}$ (0)	$-1{,}268 \cdot 10^{-5}$ (0)

*) Die Werte in Klammern sind die Integrationskonstanten bei Verzicht auf die Randbedingungen 3, 4.

Zahlentafel 6. Einfluß der Randbedingungen $u = v = 0$ auf die Randschnittkräfte infolge Wind.

	$n = 2$						$n = 3$					
	gelenkige Lagerung (II)			starre Einspannung (III)			gelenkige Lagerung (II)			starre Einspannung (III)		
	mit $\overline{C}_1 \div \overline{C}_4$	mit $\overline{C}_3 = \overline{C}_4 = 0$	Δ %	mit $\overline{C}_1 \div \overline{C}_4$	mit $\overline{C}_3 = \overline{C}_4 = 0$	Δ %	mit $\overline{C}_1 \div \overline{C}_4$	mit $\overline{C}_3 = \overline{C}_4 = 0$	Δ %	mit $\overline{C}_1 \div \overline{C}_4$	mit $\overline{C}_3 = \overline{C}_4 = 0$	Δ %
$N_y^{(m)}$	+0,04247	+0,03692	−13,1	−0,04384	−0,02328	+47	+0,01267	+0,00684	−46	$-2{,}227 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}852 \cdot 10^{-6}$	−73
N_φ	+4,552	+4,538	−0,31	+4,554	+4,526	−0,62	+1,428	+1,427	−0,07	+1,420	+1,417	−0,21
$N_{y\varphi}$	+0,4972	+0,4977	+0,10	+0,9210	+0,9223	+0,14	+0,2254	+0,2273	+0,84	+0,3829	+0,3912	+2,2
Q_y	−0,2302	−0,2301	+0,04	−0,4289	−0,4295	−0,14	−0,07174	−0,07194	−0,28	−0,1280	−0,1295	−1,2
Q_φ	$-7{,}199 \cdot 10^{-4}$	$-7{,}232 \cdot 10^{-4}$	−0,46	+0,04205	+0,04220	+0,36	$+2{,}10 \cdot 10^{-4}$	$+1{,}99 \cdot 10^{-4}$	−5,2	+0,01858	+0,01877	+1,0
$M_y^{(m)}$	0	0	0	−0,4268	−0,4286	−0,42	0	0	0	−0,1220	−0,1239	−1,6
M_φ	$-3{,}954 \cdot 10^{-3}$	$-3{,}946 \cdot 10^{-3}$	+0,20	−0,0788	−0,0787	+0,13	$-5{,}509 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}451 \cdot 10^{-3}$	+1,1	−0,02693	−0,02663	+1,1
$M_{y\varphi}$	$-4{,}273 \cdot 10^{-2}$	$-4{,}286 \cdot 10^{-2}$	−0,31	$-3{,}832 \cdot 10^{-3}$	$-3{,}850 \cdot 10^{-3}$	−0,42	−0,01952	−0,01967	−0,77	$-2{,}30 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}32 \cdot 10^{-3}$	−0,87
$u^{(m)}$	0	$-8{,}942 \cdot 10^{-7}$	—	0	$-1{,}885 \cdot 10^{-6}$	—	0	$-2{,}491 \cdot 10^{-7}$	—	0	$-5{,}754 \cdot 10^{-7}$	—
v	0	$+3{,}206 \cdot 10^{-8}$	—	0	$+2{,}758 \cdot 10^{-6}$	—	0	$+1{,}219 \cdot 10^{-7}$	—	0	$+1{,}209 \cdot 10^{-6}$	—
w	$+1{,}251 \cdot 10^{-4}$	$+1{,}252 \cdot 10^{-4}$	+0,07	$+1{,}252 \cdot 10^{-4}$	$+1{,}199 \cdot 10^{-4}$	−4,2	$+3{,}936 \cdot 10^{-5}$	$+3{,}904 \cdot 10^{-5}$	−0,81	$+3{,}934 \cdot 10^{-5}$	$+3{,}573 \cdot 10^{-5}$	−9,2

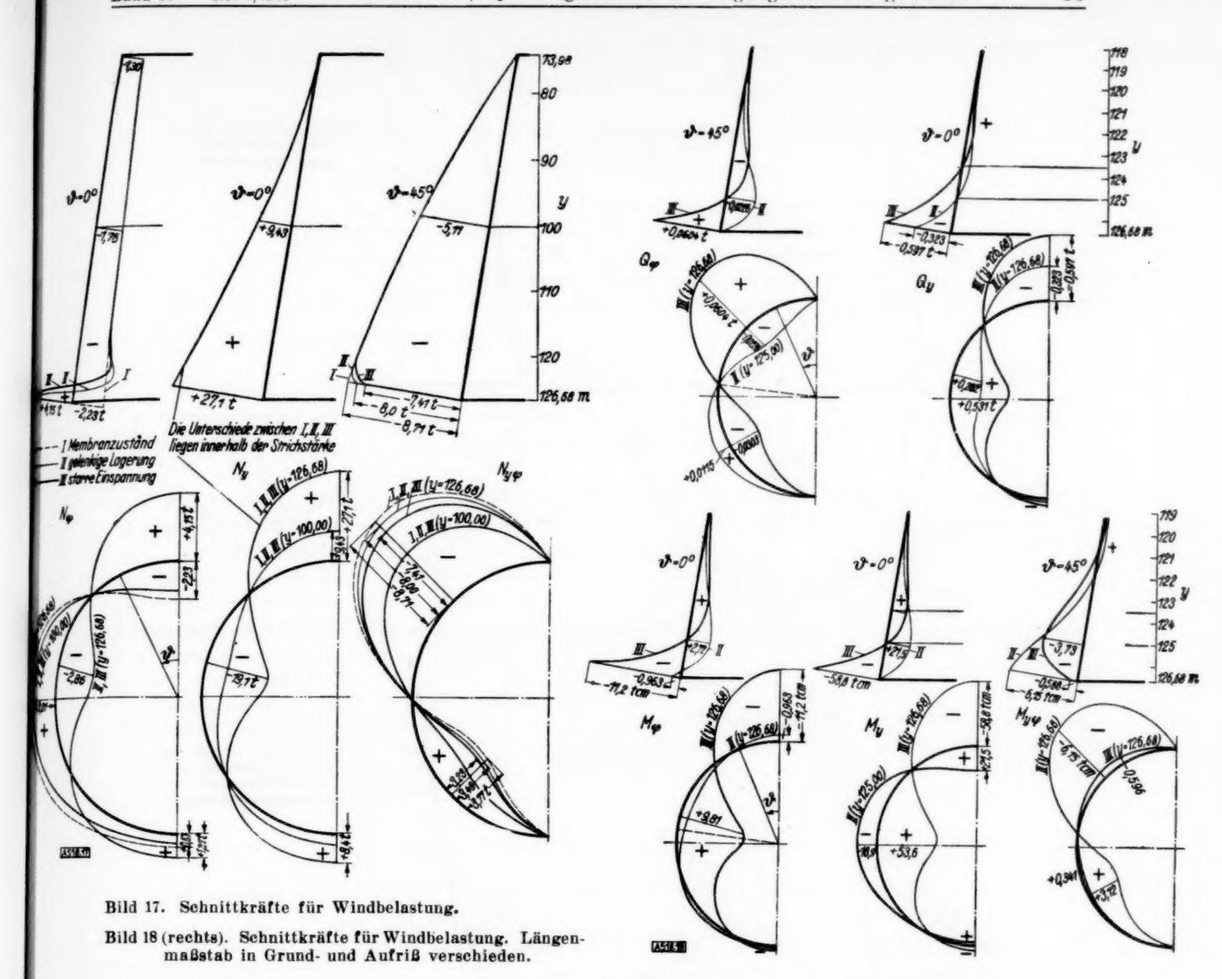


Bild 17. Schnittkräfte für Windbelastung.

Bild 18 (rechts). Schnittkräfte für Windbelastung. Längenmaßstab in Grund- und Aufriß verschieden.

Die Zahlenrechnung liefert für $\varepsilon_{\varphi n}$ und w_n' folgende Ergebnisse:

	$\varepsilon_{\varphi n}$	w_n'
$n=0$	$+1{,}321 \cdot 10^{-6}$	$+1{,}667 \cdot 10^{-7}$
$n=1$	$-1{,}874 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}010 \cdot 10^{-6}$
$n=2$	$-6{,}009 \cdot 10^{-6}$	$-6{,}018 \cdot 10^{-6}$
$n=3$	$-1{,}891 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}327 \cdot 10^{-6}$

b) Biegespannungen durch die Randkräfte.

Die Zahlenrechnungen werden getrennt für jede Harmonische n wie bei V 3b durchgeführt und dabei die Abklingungsfunktionen ohne den kleinen Anteil 3, 4 der Lösung gebildet. Um jedoch ihre Bedeutung für das Ergebnis zu untersuchen, werden die Integrationskonstanten $\bar{C}_1 - \bar{C}_4$ und die Randwerte der Schnittkräfte und Verschiebungen für $n=2$ und $n=3$ Zahlentafel 5 mit und ohne Berücksichtigung der kleinen Schwingung 3, 4 angegeben. Die Ergebnisse unterscheiden sich nach Zahlentafel 6 bis auf N_y nur wenig und begründen damit die Brauchbarkeit der Näherungslösung des Abschnittes III D. Der Unterschied bei N_y kennzeichnet die langwelligen Anteile der Abklingung als Längsspannungszustände. Der Betrag dieser Randstörung ist jedoch so gering, daß er gegen die Membrankraft N_y für die äußeren Lasten vollkommen zurücktritt.

c) Überlagerung von Membran- und Biegezustand.

Die Membran- und Biegeanteile der drei Schnittkräfte N_y, N_φ, $N_{y\varphi}$ werden zunächst für jedes n superponiert und damit die acht endgültigen Schnittkräfte jeder Belastungsfunktion n ermittelt. Die wirklich auftretenden Schnittkräfte werden nunmehr an jedem beliebigen Schalenpunkte aus den einzelnen Gliedern der trigonometrischen Reihe gebildet. Die Bilder 17 und 18 enthalten die Schaulinien für einige Meridian- und Breitenschnitte. Die Bilder 19 und 20 zeigen den Einfluß der einzelnen Glieder der Fourierreihe auf M_y und $M_{y\varphi}$.

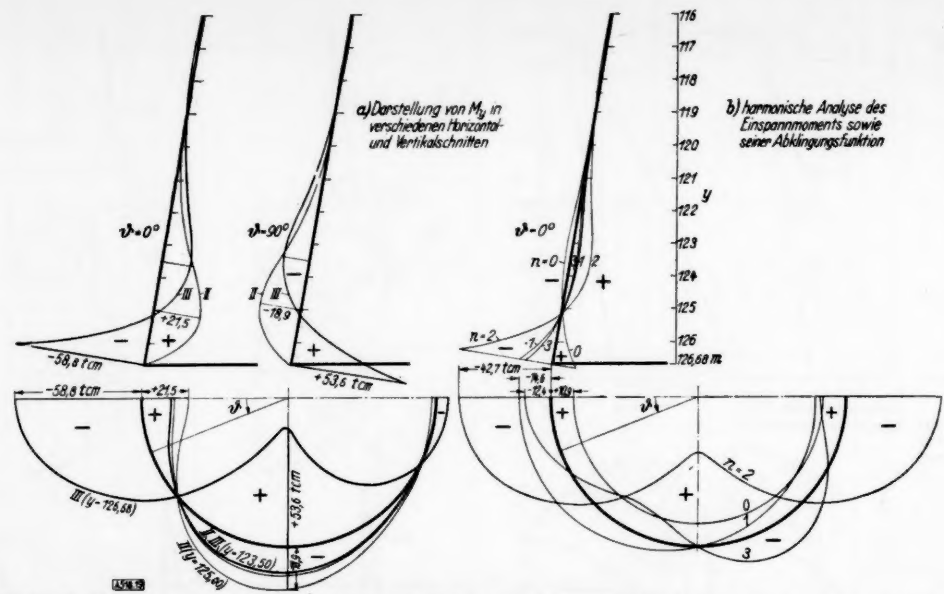


Bild 19. Meridianbiegemoment M_y [t cm] infolge Windbelastung. Längenmaßstab in Grund- und Aufriß verschieden.

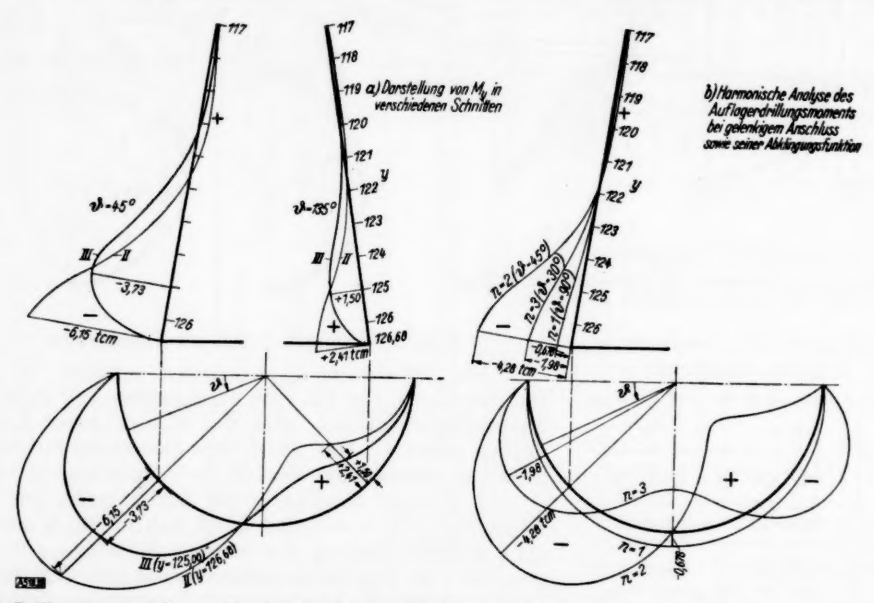


Bild 20. Drillungsmoment $M_{y\varphi} \approx M_{\varphi y}$ [tcm] infolge Windbelastung. Längenmaßstab in Grund- und Aufriß verschieden,

Schrifttumverzeichnis.

[1] A. Pflüger: Stabilität dünner Kegelschalen. Ing.-Arch. Bd. VIII (1937), S. 151.

[2] H. Heinrich: Zur rechnerischen Auflösung einer Gleichung vierten Grades. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 304.

[3] K. Federhofer: Eigenschwingungen der Kegelschale. Ing.-Arch. Bd. IX (1938), S. 288.

[4] E. Meißner: Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich Bd. 60 (1915), S. 23; derselbe: Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen-, Kugel- und Kegelform. Bd. 14 (1923), S. 343.

[5] A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität (übersetzt von A. Timpe), Leipzig u. Berlin 1907, S. 603.

[6] K. Miesel: Über die Festigkeit von Kreiszylinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. Bd. I (1930), S. 22; W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934, S. 125.

Eingegangen am 23. 10. 1943.

Zur praktischen Berechnung der Eigenwerte linearer Integralgleichungen.

Herrn Friedrich Pfeiffer zum 60. Geburtstag am 2. Mai 1943 gewidmet.

Von *Friedrich Lösch* in Rostock.

Es wird ein Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte linearer Integralgleichungen dargestellt, das für den Fall des symmetrischen Kerns mit dem bekannten Grammelschen Verfahren übereinstimmt. Seine Brauchbarkeit auch bei unsymmetrischem Kern wird an dem Beispiel der Transversalschwingungen eines einseitig eingespannten Stabs von veränderlichem Querschnitt gezeigt.

Für die praktische Berechnung der Eigenwerte einer linearen Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0$$

mit symmetrischem Kern $K(x, \xi)$ hat vor einiger Zeit Herr Grammel[1]) ein Verfahren entwickelt, das sehr schnell zu besonders guten Näherungswerten führt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man zu den Grammelschen Gleichungen in einfacher Weise gelangt, indem man an die Hilbertsche Methode der unendlich vielen Variabeln[2]) anknüpft. Im Gegensatz zu dem von Herrn Grammel bei der Ableitung seines Verfahrens eingeschlagenen Weg läßt dieses Vorgehen nicht unmittelbar erkennen, daß die aus den Grammelschen Gleichungen entspringenden Näherungen durchweg obere Schranken der Eigenwerte darstellen, bietet aber andererseits den Vorteil, daß es ohne weiteres die Übertragbarkeit des Verfahrens auf Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern ergibt. Daß auch in diesem Falle das Verfahren gute Dienste leisten kann, wird an dem Beispiel der Transversalschwingungen eines am einen Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stabes gezeigt. Man gelangt hier zu wesentlich besseren Resultaten, als sie z. B. das bekannte von Herrn Schwerin[3]) ausgearbeitete Verfahren liefert.

§ 1. Darstellung des Verfahrens.

Wir legen den folgenden Betrachtungen die homogene Integralgleichung

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (1)$$

zugrunde, wobei wir über den Kern voraussetzen:

(a) $K(x, \xi)$ ist im Bereich $a \leq x, \xi \leq b$ stetig;

(b) $K(x, \xi)$ ist im Bereich $a \leq x, \xi \leq b$ gleichmäßig nach einem über $a \leq \xi \leq b$ orthogonalen und normierten Funktionensystem

$$\psi_1(\xi),\ \psi_2(\xi),\ \ldots,\ \psi_n(\xi),\ \ldots \qquad (2),$$

entwickelbar, es gilt also gleichmäßig

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(\xi) \quad \text{mit} \quad \varphi_\nu(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, \psi_\nu(\xi)\, d\xi \qquad (3).$$

Es liegt dann nahe, die Lösung der Integralgleichung durch einen Ansatz

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, \psi_\nu(x) \qquad (4)$$

zu versuchen. Geht man damit in (1) ein, so wird man bei gliedweiser Ausführung der Integration — ob dieses Vorgehen gerechtfertigt ist, ist für das Weitere unwesentlich — zunächst auf die Gleichung

---

[1]) R. Grammel: Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme. Ing.-Arch. Bd. 10 (1939), S. 35 bis 46.

[2]) D. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin 1912, S. 174 bis 185. Vgl. auch G. Hamel: Integralgleichungen. Berlin 1937, S. 124 bis 130.

[3]) E. Schwerin: Über Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts. Z. techn. Phys. Bd. 8 (1927), S. 264 bis 271.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(x) - \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \int_a^b K(x,\xi)\,\psi_\nu(\xi)\,d\xi = 0$$

geführt. Multipliziert man diese Gleichung nacheinander mit $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_\mu(x), \ldots$ und integriert jeweils gliedweise über das Intervall $a \leqq x \leqq b$, so ergibt sich das unendliche lineare Gleichungssystem

$$a_\mu - \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} K_{\mu\nu}\, a_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

wobei zur Abkürzung

$$K_{\mu\nu} = \int_a^b \psi_\mu(x) \int_a^b K(x,\xi)\,\psi_\nu(\xi)\,d\xi\,dx \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

gesetzt ist. Formal erscheint so die Frage nach der Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung $y(x)$ der Integralgleichung (1) zurückgeführt auf die Frage nach der Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung (a_ν) des unendlichen Gleichungssystems (5).

Dieses Gleichungssystem, das der Hilbertschen Methode der unendlich vielen Variabeln zugrunde liegt[4]), behandeln wir nun in der Weise, daß wir die endlichen Abschnitte desselben betrachten und dann den Grenzübergang ausführen. Wir setzen demgemäß für $n = 1, 2, 3, \ldots$ das System der n homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$a_\mu^{(n)} - \lambda \sum_{\nu=1}^{n} K_{\mu\nu}\, a_\nu^{(n)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

an. Dieses endliche Gleichungssystem besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn λ Nullstelle der Determinante

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & \ldots & -\lambda K_{1n} \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & \ldots & -\lambda K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda K_{n1} & -\lambda K_{n2} & \ldots & 1-\lambda K_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

ist. Wir bezeichnen die n Nullstellen dieser Determinante mit

$$\lambda_1^{(n)}, \quad \lambda_2^{(n)}, \quad \ldots, \quad \lambda_n^{(n)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

wobei wir uns jede so oft aufgeführt denken, wie es ihrer Vielfachheit entspricht.

Da bei unbegrenzt wachsendem n das Gleichungssystem (7) in das unendliche System (5) übergeht, so lassen unsere Überlegungen vermuten, daß dabei unter geeigneten Voraussetzungen die Werte (9) in die Eigenwerte der Integralgleichung (1), d. h. die Nullstellen der Fredholmschen Determinante von (1) übergehen. Dies trifft in der Tat unter den zu Anfang gemachten Voraussetzungen über den Kern $K(x,\xi)$ zu. Es gilt nämlich der folgende

1. Satz: *Unter den Voraussetzungen (a) und (b) über den Kern $K(x,\xi)$ gilt für die Determinante $D_n(\lambda)$ gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich der komplexen λ-Ebene*

$$\lim_{n \to \infty} D_n(\lambda) = D(\lambda) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

wo $D(\lambda)$ die Fredholmsche Determinante der Integralgleichung (1) bedeutet. Damit konvergieren für $n \to \infty$ die Nullstellen von $D_n(\lambda)$ nach Lage und Ordnung gegen die Nullstellen von $D(\lambda)$, d. h. gegen die Eigenwerte der Integralgleichung (1).

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sehr einfach im Anschluß an bekannte Untersuchungen von E. Goursat und H. Lebesgue[5]) über die Approximation von Kernen durch ausgeartete Kerne. Wir entnehmen der Entwicklung (3) des Kerns $K(x,\xi)$ die Folge ausgearteter Kerne

$$K^{(n)}(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(\xi) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

[4]) Vgl. l. c.[2])

[5]) E. Goursat: Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm. Bull. Soc. math. France Bd. 35 (1907), S. 163 bis 173. H. Lebesgue: Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm. Bull. Soc. math. France Bd. 36 (1908), S. 3 bis 19. Vgl. auch R. Courant-D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I. Berlin 1924, S. 124 bis 128.

die nach Voraussetzung (*b*) in $a \leqq x,\ \xi \leqq b$ gleichmäßig gegen $K(x,\xi)$ konvergiert. Setzt man die Lösung der zum n. ausgearteten Kern gehörigen Gleichung

$$y^{(n)}(x) - \lambda \int_a^b K^{(n)}(x,\xi)\, y^{(n)}(\xi)\, d\xi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

in der Form

$$y^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{(n)}\, \psi_\nu(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

an, so erhält man für die Konstanten $b_\nu^{(n)}$ in bekannter Weise das lineare Gleichungssystem

$$b_\mu^{(n)} - \lambda \sum_{\nu=1}^{n} K_{\mu\nu}^{(n)}\, b_\nu^{(n)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

wobei zur Abkürzung

$$K_{\mu\nu}^{(n)} = \int_a^b \psi_\mu(x) \int_a^b K^{(n)}(x,\xi)\, \psi_\nu(\xi)\, d\xi\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

gesetzt ist. Die eingangs genannten Untersuchungen von E. Goursat und H. Lebesgue besagen dann, daß für $n \to \infty$ die Determinante des Gleichungssystems (14) gegen die Fredholmsche Determinante $D(\lambda)$ der Integralgleichung (1) konvergiert, und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich der komplexen λ-Ebene.

Weiter stimmt nun aber das Gleichungssystem (14) mit dem System (7) überein, denn den Darstellungen (3) und (11) der Kerne $K(x,\xi)$ bzw. $K^{(n)}(x,\xi)$ entnimmt man, indem man nur die Orthogonalität der Funktionen ψ_ν berücksichtigt, daß

$$K_{\mu\nu}^{(n)} = K_{\mu\nu} \qquad \text{für} \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$$

gilt. Damit ist das Bestehen der Limesrelation (10) schon bewiesen.

Auf Grund dieser Beziehung (10) vollzieht sich nun der Nachweis, daß die Nullstellen von $D_n(\lambda)$ für $n \to \infty$ nach Lage und Ordnung gegen die Nullstellen von $D(\lambda)$ konvergieren, durch übliche Schlüsse: Man hat nur zu beachten, daß nach dem Satz von Rouché die beiden Funktionen

$$D(\lambda) \quad \text{und} \quad D_n(\lambda) = D(\lambda) + [D_n(\lambda) - D(\lambda)]$$

im Innern eines beliebigen Kreises der komplexen λ-Ebene, auf dessen Peripherie $D(\lambda) \neq 0$ ist, gleich viele Nullstellen aufweisen, sobald längs der Peripherie

$$|D_n(\lambda) - D(\lambda)| < |D(\lambda)|,$$

was nach (10) für genügend große n gewiß der Fall ist.

Der im vorstehenden angewandte Grenzprozeß liefert, wie weiter bemerkt sei, nicht nur die *Eigenwerte*, sondern auch die *Eigenfunktionen* der Integralgleichung (1). Der Kürze halber soll dies hier nur unter der Annahme, daß die Eigenwerte der Integralgleichung sämtlich einfach sind, auseinandergesetzt werden. Im allgemeinen Falle hat man ganz analog zu schließen.

Wir greifen eine (auf Grund unserer Annahme einfache) Nullstelle λ_0 der Fredholmschen Determinante $D(\lambda)$ heraus. Sodann bezeichne

$$\lambda_0^{(1)},\ \lambda_0^{(2)},\ \ldots,\ \lambda_0^{(n)},\ \ldots$$

eine gegen λ_0 konvergierende Folge von Nullstellen der Determinanten

$$D_1(\lambda),\ D_2(\lambda),\ \ldots,\ D_n(\lambda),\ \ldots.$$

Für genügend großes n sind auch diese Nullstellen einfach. Es gehört dann zu $\lambda_0^{(n)}$ jeweils eine Lösung der Gl. (7):

$$a_0^{(n)},\ a_1^{(n)},\ \ldots,\ a_n^{(n)},$$

die überdies eindeutig bestimmt ist, wenn wir sie gemäß der Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^{(n)})^2 = 1$$

normiert denken. Mit dieser Lösung bilden wir — entsprechend dem Ansatz (4) — die über $a \leqq x \leqq b$ normierte Funktion

$$y^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} \psi_\nu(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Und nun gilt der

2. Satz: Der Kern $K(x, \xi)$ erfülle die Voraussetzungen (a) und (b) und besitze überdies nur einfache Eigenwerte. Ist dann λ_0 irgendein Eigenwert, so gilt für die durch (16) erklärte Funktion $y^{(n)}(x)$ gleichmäßig im Intervall $a \leqq x \leqq b$

$$\lim_{n \to \infty} y^{(n)}(x) = y(x),$$

wo $y(x)$ die zum Eigenwert λ_0 gehörige normierte Eigenfunktion des Kerns $K(x, \xi)$ bedeutet.

Beweis: Wie aus dem Beweis des 1. Satzes bekannt ist, stimmt das Gleichungssystem (7) mit dem System (14) überein. Der Vergleich von (16) mit dem Ansatz (13) zeigt daher, daß die durch (16) gegebene Funktion $y^{(n)}(x)$ die zum Eigenwert $\lambda_0^{(n)}$ gehörige normierte Eigenfunktion des ausgearteten Kerns $K^{(n)}(x, \xi)$ darstellt. Auf Grund der genannten Untersuchungen von E. Goursat und H. Lebesgue folgt dann die Behauptung unmittelbar aus der Tatsache, daß die ausgearteten Kerne $K^{(n)}(x, \xi)$ den Kern $K(x, \xi)$ gleichmäßig approximieren.

Das aus den beiden vorstehenden Sätzen entspringende Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen deckt sich für symmetrische Kerne im wesentlichen mit dem von Herrn Grammel angegebenen Verfahren[6]. In der Tat stimmen die Grammelschen Gleichungen, falls nur wie hier die Orthogonalität und Normiertheit der Koordinatenfunktionen ψ_ν angenommen wird, genau mit den obigen Gl. (7) überein. Herr Grammel gewinnt die Gleichungen unter etwas anderen Voraussetzungen aus einem Variationsprinzip und hat damit gegenüber der vorliegenden Behandlung den großen Vorteil, zu wissen, daß die aus seinen Gleichungen fließenden Näherungswerte durchweg *obere Schranken* der Eigenwerte darstellen. Es ist jedoch u. U. zweckmäßig, das Verfahren auch für unsymmetrische Kerne anzuwenden, und hier versagt der Weg über das Variationsprinzip. In der Tat zeigt die in § 2 gegebene Anwendung, daß im Falle eines unsymmetrischen Kerns die mit Hilfe der Gl. (7) berechneten Näherungen der Eigenwerte nicht notwendig obere Schranken derselben darstellen. Bei sachgemäßer Anwendung des Verfahrens sind aber auch in diesem Falle die sich ergebenden Näherungswerte sehr gut, was ja für symmetrische Kerne durchaus bekannt ist[7].

§ 2. Anwendung des Verfahrens. Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts.

Wir gehen nun noch etwas näher auf die praktische Anwendung des aus den Betrachtungen von § 1 entspringenden Verfahrens zur Berechnung der Eigenwerte einer linearen Integralgleichung (1) ein. Hier kommt es darauf an, daß schon die ersten Schritte gute Näherungen liefern. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Funktionen ψ_ν zu wählen. Nehmen wir nun an, es seien

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$$

die Eigenwerte der zu behandelnden Integralgleichung und

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_\nu(x), \ldots$$

stelle das zugehörige normierte, orthogonale System von Eigenfunktionen dar, so gilt durchweg

$$\varphi_\nu(x) = \int_a^b K(x, \xi) \psi_\nu(\xi) \, d\xi = \frac{1}{\lambda_\nu} \psi_\nu(x),$$

und damit reduziert sich das Gleichungssystem (5) auf

$$a_\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\mu}\right) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Durch Nullsetzen der zugehörigen Determinanten

$$D_1(\lambda), \; D_2(\lambda), \; \ldots, \; D_n(\lambda), \; \ldots$$

[6] Vgl. l. c. [1].

[7] Vgl. l. c. [1] sowie L. Collatz: Genäherte Berechnung von Eigenwerten. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 224 bis 249 und S. 297 bis 318.

erhält man daher nacheinander exakt die Werte

$$\lambda_1;\ \lambda_1, \lambda_2;\ \ldots;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n;\ \ldots .$$

Diese Überlegung läßt annehmen, daß man für die Eigenwerte gute Näherungen erhalten wird, wenn man für die ersten Funktionen ψ_ν einigermaßen gut geschätzte Näherungen der entsprechenden Eigenfunktionen annimmt. Für symmetrische Kerne kommt man so zu dem beim Grammelschen Verfahren üblichen Vorgehen, das in der Tat sehr gute Werte liefert. Im folgenden soll an einem Beispiel gezeigt werden, daß man auch bei unsymmetrischem Kern günstige Resultate erwarten kann.

Als Beispiel wählen wir das Problem der Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts. Dieses Problem ist unter Heranziehung der Theorie der Integralgleichungen bereits von Herrn *Schwerin*[8]) ausführlich behandelt worden. Seine Methode besteht darin, den Kern der zuständigen Integralgleichung durch die ersten Glieder seiner Fourier-Entwicklung zu approximieren und dann die Theorie der Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern anzuwenden. Wir werden im folgenden das Problem nach der oben entwickelten Methode behandeln und uns dabei genau derselben Annahmen wie Herr Schwerin bedienen.

Es bezeichne für einen am einen Ende ($x=0$) eingespannten, am andern Ende ($x=1$) freien Stab:

$F(x)$ die Querschnittsfläche in x,
F_0 die Querschnittsfläche in $x=0$,
$J(x)$ das Trägheitsmoment in x,
J_0 das Trägheitsmoment in $x=0$,
E den (konstanten) Elastizitätsmodul,
ϱ die (konstante) Dichte des Stabmaterials.

Sowohl für das reziproke Trägheitsmoment als auch für den Stabquerschnitt werde angenommen, daß sich ihr Verlauf hinreichend genau durch eine Ausgleichsparabel

$$\frac{1}{J(x)}=\frac{1}{J_0}\cdot(1+a_1 x+a_2 x^2) \quad \text{bzw.} \quad F(x)=F_0\cdot(1+a_3 x+a_4 x^2)$$

darstellen lasse. Dann besteht für die Eigenfrequenzen p und die zugehörigen Schwingungsformen $y(x)$ des Stabs die Integralgleichung

$$y(x)-\lambda\int_0^1 K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

mit

$$K(x,\xi)=\frac{F(\xi)}{F_0}\,G(x,\xi), \quad G(x,\xi)=\begin{cases} x\left[\dfrac{\xi^2}{2}+\dfrac{a_1\xi^3}{6}+\dfrac{a_2\xi^4}{12}\right]-\left[\dfrac{\xi^3}{6}+\dfrac{a_1\xi^4}{12}+\dfrac{a_2\xi^5}{20}\right] & \text{für } x>\xi,\\ \xi\left[\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{a_1x^3}{6}+\dfrac{a_2x^4}{12}\right]-\left[\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{a_1x^4}{12}+\dfrac{a_2x^5}{20}\right] & \text{für } x<\xi,\end{cases} \quad (18\text{a})$$

und

$$\lambda=\frac{\varrho F_0}{E J_0}p^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18\text{b}).$$

Wie man weiß, ist der Kern der Integralgleichung (17) positiv definit; die Eigenwerte denken wir nach wachsender Größe numeriert:

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots .$$

Um nach der in § 1 entwickelten Methode[9]) Näherungen für die niedersten Eigenwerte zu bekommen, wählen wir für $\psi_1(x)$ ein normiertes Polynom möglichst niedriger Ordnung, das die für die Schwingungsformen $y(x)$ geltenden Randbedingungen

$$y(0)=y'(0)=0, \quad y''(1)=y'''(1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

erfüllt. Dies leistet das Polynom 4. Grades

$$\psi_1(x)=\alpha_1 x^2+\beta_1 x^3+\gamma_1 x^4$$

mit

$$\alpha_1=3{,}946761, \quad \beta_1=-2{,}631174, \quad \gamma_1=0{,}657794.$$

[8]) Vgl. l. c.[3]).

[9]) Da der Kern symmetrisierbar ist, so läßt sich direkt das Grammelsche Verfahren anwenden. Es empfiehlt sich jedoch, an die unsymmetrische Form der Integralgleichung anzuknüpfen, damit sich die Elemente $K_{\mu\nu}$ der Determinante $D_n(\lambda)$ bequem in den Parametern a_1, a_2, a_3, a_4 ausdrücken.

Für $\psi_2(x)$ wählen wir sodann das normierte Polynom 5. Grades, das die Randbedingungen (19) erfüllt und zu $\psi_1(x)$ orthogonal ist:

$$\psi_2(x) = a_2 x^2 + \beta_2 x^3 + \gamma_2 x^4 + \delta_2 x^5$$

mit

$$a_2 = 32{,}162440, \quad \beta_2 = -81{,}294019, \quad \gamma_2 = 65{,}212799, \quad \delta_2 = -17{,}955718.$$

Entsprechend wählen wir schließlich für $\psi_3(x)$ das normierte Polynom 6. Grades, das die Randbedingungen (19) erfüllt und zu $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ orthogonal ist:

$$\psi_3(x) = a_3 x^2 + \beta_3 x^3 + \gamma_3 x^4 + \delta_3 x^5 + \varepsilon_3 x^6$$

mit

$$a_3 = 117{,}604528, \quad \beta_3 = -568{,}165629, \quad \gamma_3 = 959{,}328359, \quad \delta_3 = -686{,}886776, \quad \varepsilon_3 = 179{,}985998.$$

Brechen wir an dieser Stelle ab, so sind wir in der Lage, die Determinante

$$D_3(\lambda)$$

aufzustellen, womit zugleich $D_1(\lambda)$ und $D_2(\lambda)$ bekannt sind. Berechnen wir ihre Elemente $K_{\mu\nu}$ nach den Formeln (6), so erhalten wir dieselben in der Form

$$\left.\begin{aligned} K_{\mu\nu} = K^{(0)}_{\mu\nu} + K^{(1)}_{\mu\nu} a_1 + K^{(2)}_{\mu\nu} a_2 + K^{(3)}_{\mu\nu} a_3 + K^{(4)}_{\mu\nu} a_4 \\ + K^{(13)}_{\mu\nu} a_1 a_3 + K^{(14)}_{\mu\nu} a_1 a_4 + K^{(23)}_{\mu\nu} a_2 a_3 + K^{(24)}_{\mu\nu} a_2 a_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

wobei die Größen $K^{(\lambda)}_{\mu\nu}$ die in der nachfolgenden Zahlentafel angegebenen Werte besitzen.

Zahlentafel zur Berechnung der Größen $K_{\mu\nu}$.

μ	ν	$10^2\,K^{(0)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(1)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(2)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(3)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(4)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(13)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(14)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(23)}_{\mu\nu}$	$10^2\,K^{(24)}_{\mu\nu}$
1	1	8,0874	1,5590	0,4943	6,5051	5,4305	1,2848	1,0904	0,4154	0,3575
1	2	− 0,1115	− 0,2191	− 0,1186	− 0,1218	− 0,1205	− 0,1898	− 0,1668	− 0,1030	− 0,0907
1	3	0,0014	0,0076	0,0180	0,0042	0,0062	0,0099	0,0108	0.0170	0,0160
2	1	− 0,1115	− 0,2191	− 0,1186	− 1,3143	− 1,8034	− 0,3665	− 0,4249	− 0.1470	− 0,1570
2	2	0,2061	0,0865	0.0474	0,1368	0,1065	0,0868	0,0853	0,0482	0,0473
2	3	− 0,0158	− 0,0205	− 0,0150	− 0,0145	− 0,0124	− 0,0154	− 0,0130	− 0,0131	− 0,0119
3	1	0,0014	0,0076	0,0180	0,2590	0,5928	0,0920	0,1601	0,0466	0,0660
3	2	− 0,0158	− 0,0205	− 0,0150	− 0,0509	− 0,0576	− 0,0330	− 0,0414	− 0,0192	− 0,0259
3	3	0,0270	0,0127	0,0095	0,0167	0,0141	0,0133	0,0095	0,0087	0,0075

Um einen Anhaltspunkt für die Güte der damit erreichten Näherung zu gewinnen, behandeln wir zunächst den Stab von konstantem Querschnitt, für den die genauen Werte

$$\lambda_1 = 12{,}3624, \quad \lambda_2 = 485{,}66, \quad \lambda_3 = 3806$$

(jeweils auf die angeschriebenen Stellen abgerundet) bekannt sind. In diesem Falle wird einfach:

$$K_{\mu\nu} = K^{(0)}_{\mu\nu}$$

und man erhält nacheinander

aus $D_1(\lambda) = 0$ die Näherung: $\lambda_1 \sim 12{,}3648$;
aus $D_2(\lambda) = 0$ die Näherungen: $\lambda_1 \sim 12{,}3624$; $\lambda_2 \sim 488{,}70$;
aus $D_3(\lambda) = 0$ die Näherungen: $\lambda_1 \sim 12{,}3624$; $\lambda_2 \sim 485{,}50$; $\lambda_3 \sim 3840$.

Demgegenüber erhält man bei demselben Arbeitsaufwand nach dem Schwerinschen Verfahren, wenn die dort zur Verwendung kommenden, den $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, $D_3(\lambda)$ entsprechenden Determinanten mit

$$\Delta_1(\lambda), \ \Delta_2(\lambda), \ \Delta_3(\lambda)$$

bezeichnet werden, nacheinander [10])

aus $\Delta_1(\lambda) = 0$ die Näherung: $\lambda_1 \sim 8$
aus $\Delta_2(\lambda) = 0$ die Näherungen: $\lambda_1 \sim 12{,}71$; $\lambda_2 \sim 691{,}0$;
aus $\Delta_3(\lambda) = 0$ die Näherungen: $\lambda_1 \sim 12{,}355$; $\lambda_2 \sim 520{,}33$; $\lambda_3 \sim 6917$.

[10]) Bei der Ermittlung dieser Näherungen sind bereits einige Versehen berücksichtigt, die sich in die Schwerinsche Arbeit eingeschlichen haben. Wie ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn *Pfeiffer* entnehme, muß es dort in der Tabelle zur Berechnung der Größen A_{mn} heißen:

$A_{023} = +6{,}971$ statt $+6{,}911$; $\quad G_{33} = +0{,}201$ statt $+2{,}201$; $\quad L_{23} = +0{,}399$ statt $+0{,}396$.

Man erkennt, daß selbst die aus $\Delta_3(\lambda)=0$ errechneten Näherungen für λ_1 und λ_2 noch erheblich schlechter sind, als die oben für λ_1 und λ_2 aus $D_1(\lambda)=0$ bzw. $D_2(\lambda)=0$ erhaltenen Werte.

Als zweites Beispiel werde der durch

$$\frac{J_0}{J}=1+0{,}79646\,x+0{,}99452\,x^2,\qquad \frac{F}{F_0}=1-0{,}57197\,x-0{,}02357\,x^2$$

charakterisierte Stab behandelt. Für ihn ist

$$a_1=0{,}79646,\quad a_2=0{,}99452,\quad a_3=-0{,}57197,\quad a_4=-0{,}02357;$$

mit diesen Werten sind die Größen $K_{\mu\nu}$ nach (20) an Hand der Zahlentafel zu berechnen. Man erhält dann nacheinander

aus $D_1(\lambda)=0$ die Näherung: $\lambda_1\sim 19{,}53$;
aus $D_2(\lambda)=0$ die Näherungen: $\lambda_1\sim 19{,}6181$; $\lambda_2\sim 510{,}75$;
aus $D_3(\lambda)=0$ die Näherungen: $\lambda_1\sim 19{,}6184$; $\lambda_2\sim 511{,}80$; $\lambda_3\sim 3779$.

Das Schwerinsche Verfahren liefert dagegen mit demselben Arbeitsaufwand

aus $\Delta_1(\lambda)=0$ die Näherung: $\lambda_1\sim 11{,}64$;
aus $\Delta_2(\lambda)=0$ die Näherungen: $\lambda_1\sim 19{,}97$; $\lambda_2\sim 699{,}2$;
aus $\Delta_3(\lambda)=0$ die Näherungen: $\lambda_1\sim 19{,}629$; $\lambda_2\sim 540{,}70$; $\lambda_3\sim 6649$.

Das Bild ist also genau dasselbe wie im Falle des Stabes mit konstantem Querschnitt. 520

Eingegangen am 18. 10. 1943.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zum Determinantenverfahren von Chiò. Das Verfahren von Chiò zur zahlenmäßigen Berechnung von Determinanten, empfohlen in E. T. Whittaker und G. Robinson, The calculus of observations, 1. Aufl. London 1924, 2. Aufl. London 1926, Kap. V, besteht darin, die gegebene Determinante $|a_{ik}|_{i,k=1}^{n}$ zu reduzieren auf das mit Vorzeichen $(-1)^{p+q}$ versehene Produkt aus einem beliebig (wenn vorhanden, gleich 1) gewählten „Leitelement" a_{pq} mit einer Determinante nächstniedriger Ordnung, deren Elemente folgendermaßen zustandekommen: In der ursprünglichen Determinante streicht man die $p$te Zeile und die $q$te Spalte des Leitelements a_{pq} und fällt von jedem übrigbleibenden Element a_{ik} Lote auf die Streichungslinien. Dann nimmt man das Produkt der beiden getroffenen „Fußpunktelemente" a_{pk} und a_{iq}, teilt es durch das Leitelement a_{pq} und zieht den so gefundenen Ausdruck $\frac{a_{pk}\cdot a_{iq}}{a_{pq}}$ von dem alten Element a_{ik} ab. Das neue Element heißt also

$$a_{ik}-\frac{a_{pk}\cdot a_{iq}}{a_{pq}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1).$$

Diese Reduktionsregel für Determinanten ist weiter nichts als eine auf Determinanten zugeschnittene Fassung des Gaußschen Eliminationsverfahrens für lineare Gleichungssysteme

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_k=r_i\quad(i=1,2,\ldots,n)\quad\ldots\quad(2).$$

Denn nach Gauß eliminiert man bekanntlich eine Unbekannte, z. B. die $q$te Unbekannte x_q, dadurch, daß man eine Gleichung, etwa die $p$te Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_{pk}\,x_k=r_p\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3),$$

als „Eliminationsgleichung" der Reihe nach mit geeigneten Faktoren so multipliziert, daß bei Addition zu jeder der übrigen Gleichungen x_q herausfällt. In (2) hat x_q die Vorzahl a_{iq}, in (3) die Vorzahl a_{pq}. Also muß (3) mit $-\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$ multipliziert werden. Dabei entsteht das neue, die Unbekannte x_q nicht mehr enthaltende Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\sideset{}{'}\sum_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{n}\left(a_{ik}-a_{pk}\frac{a_{iq}}{a_{pq}}\right)x_k=r_i-r_p\frac{a_{iq}}{a_{pq}}\\[2ex](i=1,2,\ldots,p-1,\,p+1,\ldots,n)\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(4),$$

dessen Koeffizienten offenkundig der Bildungsvorschrift (1) genügen.

In der Determinante von (2) werden bei der Gaußschen Elimination lediglich Zeilen kombiniert und dadurch in der $q$ten Spalte Nullen herbeigeführt bis auf a_{pq}. Die Determinante von (2) wird also gleich $(-1)^{p+q}\,a_{pq}$ mal der Determinante von (4), was mit der Regel von Chiò gleichbedeutend ist.

Darmstadt. A. Walther. 499

Über die Dämpfung von Schwingungen bei zeitlich veränderlichen Kräften. Ein System gekoppelter Freiheitsgrade $y_1,\ldots,y_m$ möge einem System von m linearen Differentialgleichungen mit der Zeit t als unabhängiger Variabler genügen. Sind die Koeffizienten zeitlich konstant, so entscheiden allein die Realteile der Wurzeln der in bekannter Weise gebildeten charakteristischen Gleichung des Systems über die Dämpfung der Schwingungen, die die y_μ ausführen. Welche Abänderung der Regel tritt ein, wenn die Koeffizienten des Systems mit t langsam veränderlich sind?

Zur Beantwortung dieser Frage bringe man das System in die Gestalt

$$\dot y_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,y_\nu\quad(\mu=1,2,\ldots,n)\quad.\;.\quad(1)$$

mit $n\geqq m$, wozu i. a. nötig sein wird, einige Ableitungen der Freiheitsgrade $y_1,\ldots,y_m$ nach der Zeit als neue Variable $y_{m+1},\ldots,y_n$ einzuführen.

Das System (1) läßt sich unter Verwendung der Matrizensymbole

$$\mathfrak{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{A}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

in der Gestalt

$$\dot{\mathfrak{y}}=\mathfrak{A}\,\mathfrak{y}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

schreiben. Führt man an Stelle von $\mathfrak{y}$ ein System $\mathfrak{z}$ neuer unabhängiger Funktionen $z_1,\ldots,z_n$ mittels der Gleichungen

$$z_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} r_{\mu\nu}\,y_\nu\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

bzw. wieder in Matrizenschreibweise

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{R}\,\mathfrak{y}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

ein, so gilt

$$\dot{\mathfrak{z}}=\mathfrak{B}\,\mathfrak{z}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

mit

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{R}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R}^{-1}+\dot{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}^{-1}\;.\;.\;.\;.\;(6),$$

wobei

$$\dot{\mathfrak{R}}=(\dot r_{\mu\nu})=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}r_{\mu\nu}\right)$$

bedeutet.

Nach Erwähnung dieses bekannten Sachverhaltes wähle man für $\mathfrak{R}$ insbesondere eine solche Matrix, daß

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R}^{-1}=\mathfrak{L}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

eine Diagonalmatrix ist. Die λ_ν sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen der Matrix $\mathfrak{A}$, wir setzen sie hier als von einander verschieden voraus, damit (7) überhaupt möglich ist. Die Matrix $\mathfrak{R}$ kann hierbei noch mit einer beliebigen Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ links multipliziert, d. h. durch $\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}$ ersetzt werden. Dadurch kann erreicht werden, daß eine Zeile von $\mathfrak{R}^{-1}$, etwa die erste, zeitlich konstante Koeffizienten besitzt. Wegen

$$\mathfrak{y}=\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{z}$$

ist nun die Dämpfung der Bewegung von $y_1(t)$ dieselbe wie der Bewegung der $z_\nu(t)$; es genügt also, letztere zu untersuchen.

Die z_ν bestimmen sich aus dem Differentialgleichungssystem (5), dessen Matrix nach (6) und (7)

$$\mathfrak{B}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}+\mathfrak{C},\qquad \mathfrak{C}=\dot{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}^{-1}\;.\;.\;.\;(8)$$

ist, wobei noch anzumerken ist, daß die Koeffizienten der Matrix $\mathfrak{C}$ unter anderem von den $\dot a_{\mu\nu}=\dfrac{d}{d\,t}a_{\mu\nu}$ homogen und linear abhängen; sie verschwinden also, wenn letztere verschwinden, und sind klein, wenn letztere klein sind.

Sind diese Größen sehr klein, so erhält man bei ihrer Vernachlässigung $\mathfrak{C}=0$ und die Lösungen

$$z_\nu\approx e^{\int\lambda_\nu\,\mathrm{d}t}\approx c_\nu\,e^{\lambda_\nu t}\;.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

von (5), dabei bedeuten c_ν Integrationskonstanten. Bei langsam veränderlichen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ ist (9) die erste Näherung an die Lösung.

Um die zweite Näherung zu erhalten, transformiere man nochmals auf Diagonalform:

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{S}^{-1}=\bar{\mathfrak{L}}=\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n\end{pmatrix}\;.\;.\;.\;(10)$$

und führe neue Veränderliche $\bar z_1,\ldots,\bar z_n$ ein, welche, in einer einspaltigen Matrix $\bar{\mathfrak{z}}$ angeordnet, den Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{S}\,\mathfrak{z}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

und

$$\dot{\bar{\mathfrak{z}}}=\bar{\mathfrak{B}}\,\bar{\mathfrak{z}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(12)$$

genügen, wobei

$$\bar{\mathfrak{B}}=\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n\end{pmatrix}+\bar{\mathfrak{C}},\qquad \bar{\mathfrak{C}}=\dot{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{S}^{-1}\;.\;.\;(13)$$

ist. Die Elemente der Matrix $\bar{\mathfrak{C}}$ bestehen nun, wie aus dem folgenden hervorgeht, aus linearen Kombinationen der zweiten Ableitungen $\ddot a_{\mu\nu}$ und der Produkte $\dot a_{\mu\nu}\,\dot a_{\mu'\nu'}$ und sind folglich von höherer Ordnung klein als die Koeffizienten von $\mathfrak{C}$. Die durch Vernachlässigung von $\bar{\mathfrak{C}}$ entstehende Lösung

$$\bar z_\nu\approx e^{\int\bar\lambda_\nu\,\mathrm{d}t}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(14)$$

von (5) ist demnach besser als (9); es ist die gesuchte zweite Näherung.

Zur Auswertung von (14) braucht man die Werte der $\bar\lambda_\nu$ sowie die Matrix $\mathfrak{S}$. Letztere wird sich von der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ nicht wesentlich unterscheiden, wenn die Elemente von $\mathfrak{C}$ hinreichend klein sind, wie angenommen werden sollte. Man setze also

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{E}+\mathfrak{T},\qquad \mathfrak{S}^{-1}\approx\mathfrak{E}-\mathfrak{T},$$

dann ist nach (8) und (10)

$$\mathfrak{L}+\mathfrak{C}+\mathfrak{T}\,\mathfrak{L}-\mathfrak{L}\,\mathfrak{T}=\bar{\mathfrak{L}},$$

also gilt für die Elemente $t_{\mu\nu}$ von $\mathfrak{T}$

$$t_{\nu\nu}=0,\qquad t_{\mu\nu}(\lambda_\nu-\lambda_\mu)+c_{\mu\nu}=0\quad\text{für }\mu\neq\nu$$

und

$$\bar\lambda_\nu=\lambda_\nu+c_{\nu\nu}.$$

Die Formeln (11) und (14) ergeben dann

$$\left.\begin{aligned} z_\mu(t)&=e^{\int(\lambda_\mu+c_{\mu\mu})\,\mathrm{d}t}\\ &\quad-\sum_{\nu\neq\mu}\frac{c_{\mu\nu}}{\lambda_\mu-\lambda_\nu}\,e^{\int(\lambda_\nu+c_{\nu\nu})\,\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\}\;(15).$$

Im Sinne unseres bisherigen Verfahrens, $\ddot a_{\mu\nu}=\dot a_{\mu\nu}\,\dot a_{\mu'\nu'}=0$ zu setzen, haben die Koeffizienten dieses Systems als Konstanten zu gelten. Folglich sind die Funktionen $z_\nu(t)$ in gleicher Weise gedämpft wie die Funktionen (14).

Das hiermit gewonnene Ergebnis kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Regel: Es sei das System (1) linearer homogener Differentialgleichungen ersten Grades vorgelegt, dessen Koeffizienten von t schwach abhängen. Dann ist die i-te (z. B. 1-te) gesuchte Funktion y_i (z. B. y_1) in erster bzw. zweiter Näherung eine lineare Kombination der Funktionen

$$e^{\int\lambda_\nu\,\mathrm{d}t}\quad\text{bzw.}\quad c^{\int(\lambda_\nu+c_{\nu\nu})\,\mathrm{d}t};$$

dabei bedeuten λ_ν die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}=(a_{\mu\nu})$ und $c_{\nu\nu}$ die Diagonalenelemente der Matrix

$$\dot{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}^{-1}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathfrak{R}\right)\mathfrak{R}^{-1}=-\mathfrak{R}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathfrak{R}^{-1}\right),$$

wobei $\mathfrak{R}$ der Gl. (7) genügt und dabei so normiert ist, daß die Elemente der i-ten

(z. B. 1-ten) Zeile von $\mathfrak{R}^{-1}$ von t unabhängig sind.

Beispiel: Eine Differentialgleichung

$$\ddot{y}_1 + a\dot{y}_1 + b y_1 = 0$$

zweiter Ordnung läßt sich als System so schreiben:

$$\dot{y}_1 = \qquad y_2,$$
$$\dot{y}_2 = -b y_1 - a y_2.$$

Es ist nun

$$\mathfrak{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{R} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad c_{22} = \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Die Bewegung von y_1 verläuft also gedämpft, wenn die Realteile von

$$\lambda_1 + \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad \lambda_2 + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

negativ sind; die Beträge dieser Realteile sind die logarithmischen Dekremente der Bewegung.

Handelt es sich um echte Schwingungen:

$$\lambda = \sigma + i\omega,$$

und σ und ω reell, so sind diese stabil, sobald

$$\sigma - \frac{\dot{\omega}}{2\omega} < 0$$

ist, anderenfalls labil.

Göttingen. Martin Eichler. 510

Über einen mit Hilfe seines Schattens gelenkten Integraphen[1]**).** Bild 1 zeigt zwei windschiefe Gerade Z, G in Auf- und Grundriß. Z ist lotrecht, G unter 45° geneigt. bd ist das Gemeinlot der beiden und habe die Länge l; c sei der Punkt auf G, dessen Aufriß c'' auf Z″ liegt. Dann ist

$$\overline{d''c''} = \overline{b'c'} = l \operatorname{tg} \alpha,$$

wo α der Winkel des Gemeinlotes mit der Richtung des Aufrisses ist. Wir werden meist $l = 1$ nehmen.

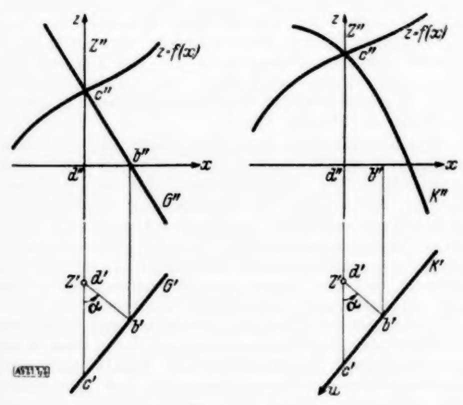


Bild 1 und 2.

[1]) Vortrag auf der Kriegstagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1943 in Würzburg.

Nun bringen wir G und Z als gespannte Fäden an einem zweirädrigen Karren so an, daß die Achse seiner Räder in der lotrechten Ebene durch bd liegt. Die Ebene, auf der er fährt, sei die Grundrißebene Π_1; ferner schreibe er mit einem federnd auf Π_1 drückenden Stift im Schnittpunkt von Z mit Π_1. Seine Deichsel liege in der durch Z gehenden zu G parallelen Ebene und habe an ihrer Spitze einen auf Π_1 gleitenden Fuß. Erzeugen wir dann noch den Aufriß des Geradenpaares als Schatten in einer Parallelbeleuchtung, so haben wir einen Grundintegraphen, d. h. ein Gerät zum Zeichnen von Integralen $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Um nämlich ein solches Integral zu zeichnen, bringen wir die Kurve $z = f(x)$ so in die Aufrißebene, daß d'' und b'' in der etwa nach rechts gerichteten x-Achse liegen. In der Grundrißebene verwenden wir dasselbe x, während die y-Achse normal zur Aufrißebene nach hinten gerichtet sei. d' habe in Π_1 die Koordinaten x, y. Wir ziehen den Karren an seiner Deichsel so dahin, daß der Schnitt der Schatten von G und Z auf der Kurve $z = f(x)$ wandert. Dann ist beständig $y' = l f(x)$, also

$$y = l \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die einzige Schwierigkeit dabei ist, daß es anscheinend noch keine hierfür brauchbare Parallelbeleuchtung gibt. Die Sonne liefert sie jedenfalls nicht ohne weiteres. Denn sie hat einen scheinbaren Durchmesser von ½°, d. h. die Sonnenstrahlen weichen von einer mittleren Richtung nach allen Seiten um Winkel bis zu ¼° ab.

Wir können Z″ und G'' aber auch ohne Parallelbeleuchtung auf folgende Weise als Schatten bekommen. Wir bringen auf dem Karren zwei elektrische Glühbirnen, in denen je ein gerader Faden leuchtet, so an, daß die leuchtenden Fäden in den Verlängerungen der Fäden Z und G liegen. Diese Lampen blenden wir so ab, daß sie die Aufrißebene nicht unmittelbar, sondern durch einen zur Aufrißebene parallelen ebenen Spiegel beleuchten. Die Spiegelbilder G^* und Z* werfen dann von G und Z auf Π_2 gerade die Schatten G'' und Z″. Zwar ist G'' von Z*, Z″ von G^* beleuchtet, sie sind aber trotzdem sehr deutlich, vorausgesetzt, daß sonst kein Licht auf Π_2 fällt, weil das Auge einen Sprung in der Helligkeit von 50 % auf 100 % sehr gut wahrnimmt. Natürlich wirft Z* auch einen Schatten von G, G^* einen Schatten von Z; die sind aber so blaß, daß sie nicht stören.

Bringt man das Geradenpaar Z, G so auf dem Karren an, daß die Achse seiner Räder mit db den Winkel $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ einschließt, dann wird

$$y' = l \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{l[f(x) + \operatorname{tg}\beta]}{1 - f(x)\operatorname{tg}\beta} = \frac{l f(x) + l k}{1 - k f(x)} \quad (1),$$

wo $k = \operatorname{tg}\beta$ gesetzt ist. Ist $\beta = \frac{\pi}{2}$ und $l = 1$, dann wird

$$y' = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{f(x)}.$$

Der Integraph zeichnet dann also das Kehrwertintegral

$$y = \int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}.$$

Statt der Geraden Z und G kann man auch G und die aus G durch Drehung um Z um 180° entstehende Gerade H verwenden. Das ist bei kleinem l zweckmäßig, weil es die Genauigkeit vergrößert.

Bei größerem l bekommt der Karren dadurch aber eine unhandliche Breite. Es ist unwesentlich, daß G (und damit H) unter 45° geneigt ist. Eine Änderung der Neigung wirkt wie eine Änderung von l.

Man kann diesen Integraphen auf zwei Arten leicht zu einem Momenten- und Stieltjesintegraphen verallgemeinern. Verfügt man nämlich über eine hinreichend saubere Parallelbeleuchtung, dann kann man G durch eine in einer lotrechten Ebene ε liegende Kurve K ersetzen (Bild 2). u und z seien Koordinaten in ε, wobei z wie oben die Höhe über einem Punkt d von Z bedeutet. Das Lot von d auf ε treffe ε im Punkt b. u sei der Abstand des Punktes (u, z) von der Parallelen zu Z durch b, und zwar habe ein in der zu Π_2 normalen Ebene durch Z liegender Punkt c positives u, wenn α positiv ist. Der Einfachheit halber sei $l = 1$ und die Radachse zu ε normal. Wir ziehen den Karren so an der Deichsel dahin, daß der Schnittpunkt der Schatten von Z und K auf der Kurve $z = f(x)$ wandert. Hat K in ε die Gleichung $u = g(z)$, dann wird

$$\left.\begin{aligned} y' &= \operatorname{tg} \alpha = \overline{c' b'} = u = g(z) = g(f(x)), \\ \text{d. h.} \quad y &= \int g(f(x))\, \mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2).$$

Unter diese Form fallen die Momentintegrale

$$\int f(x)^n \,\mathrm{d}x\,.$$

Schreibt man (2) in der Form

$$y = \int g(z)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{wo} \qquad x = f^{-1}(z) \quad \text{ist},$$

so hat man ein Stieltjesintegral. Diese Integration kann im Gegensatz zu anderen Stieltjesintegraphen e i n Arbeiter ausführen [2]).

Bei Verzicht auf eine Parallelbeleuchtung hat man folgende Möglichkeit. Man verwendet als schattenwerfende Kurven wieder Z und G, als Lichtquellen wie oben Z* und G^*, stellt aber mit Hilfe eines Funktionsgetriebes einen funktionellen Zusammenhang zwischen den obengenannten Winkeln α und β her. Er sei in der Form $\alpha + \beta = h(\alpha)$ geschrieben. Dann wird

$$\begin{aligned} y' &= \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} h(\alpha) \\ &= \operatorname{tg} h(\operatorname{arctg} f(x)) = g(f(x)), \end{aligned}$$

wo $\operatorname{tg} h(\operatorname{arctg} z) = g(z)$ gesetzt ist.

Innsbruck. L. Vietoris. 521

[2]) Vgl. etwa Meyer zur Capellen, Mathematische Instrumente. Leipzig 1941, S. 183.

BUCHBESPRECHUNGEN

Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik der Eidgen. Techn. Hochschule Zürich, Nr. 8. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret. 72 S. Zürich 1943, Verlag A. G. Gebr. Leemann & Co.

Das Heft beinhaltet vier Aufsätze: (1) Abdruck einer schon früher veröffentlichten Beschreibung der Windkanäle des Züricher Institutes (J. Ackeret); (2) Beschreibung eines Gerätes zur Messung turbulenter Schwankungen in Windkanälen mit Hilfe der Hitzdrahtmethode, das gegenüber dem bekannten Gerät von Dryden vereinfacht ist (G. Dätwyler); (3) Einzelheiten der Schlierenoptik des Züricher Überschallkanales (P. de Haller). (4) An einem Tragflügel ergab bei der Widerstandsmessung ein Vergleich der Impulsmethode mit der Wägung recht gute Übereinstimmung, wenigstens für kleine Auftriebswerte. Bemerkenswert ist die erstmals mitgeteilte Bestimmung des laminar-turbulenten Umschlagspunktes mit Hilfe eines an das Staurohr angeschlossenen Hörrohres, wie es Ärzte verwenden; das Einsetzen der Turbulenz wird durch charakteristische Geräusche (Knattern) angezeigt (W. Pfenniger).

Göttingen. H. Schuh. 514

Dr.-Ing. Dr. techn. E. **RAUSCH**, a. pl. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben, 3. Teil: Rahmenfundamente bei hoher Maschinendrehzahl (insbesondere Dampfturbinenfundamente), Aufstellung von Maschinen in Gebäuden, Werkzeugmaschinen, Schäden an Maschinenfundamenten und Erschütterungsschäden anderer Art, andere dynamische Aufgaben im Bauwesen nebst Ergänzung zum 1. und 2. Teil des Buches. 365 S. m. 377 Bildern. Berlin 1942, VDI-Verlag. Preis brosch. 35 M.

Der Verfasser, der in dem 1. Teil des Buches allgemeine Gesichtspunkte für die bauliche Durchbildung von Maschinenfundamenten und im 2. Teil Ausführungsbeispiele für Block- und Kastenfundamente bei hin- und hergehenden oder umlaufenden Maschinen angegeben hat, behandelt in diesem 3. Teil die Rahmenfundamente für Maschinen mit hoher Drehzahl und beschließt die Arbeit mit wertvollen Hinweisen über die Aufstellung von Maschinen, über Bauschäden an Maschinenfundamenten, Erschütterungsschäden und andere Bauaufgaben, deren Lösung zu dynamischen Untersuchungen führt. Das Buch ist für den Bauingenieur geschrieben, der Belehrung über die Anwendung der einfachen dynamischen Berechnungen sucht, mit denen die elasto-kinetischen Eigenschaften der Maschinenfundamente beurteilt und als Grundlage für die Bemessung und bauliche Durchbildung der Baukörper verwendet werden. Er schöpft hierbei aus der eigenen, reichen Erfahrung und berichtet mit ausführlichen Zahlenrechnungen und Zeichnungen vor allem über die allgemeine Anordnung, die statische Berechnung, die Bemessung der Rundstahlbewehrung und über die Bauausführung von Dampfturbinenfundamenten. Die eigentlichen dynamischen Gesichtspunkte treten dabei zurück, obwohl man in diesem Zusammenhang gern die Bestätigung der Rechnung durch Einmessen der Resonanzlagen beim Hochfahren der Maschinen durch Amplitudenkurven erhalten hätte.

Hieran schließen sich Angaben über die Aufstellung von Maschinen in Gebäuden und über Bauschäden an Fundamenten, die durch dynamische Wirkungen in Verbindung mit mangelhafter Bauausführung hervorgerufen worden sind. Zum Schluß berichtet der Verfasser über Schwingungen an Bauwerken, insbesondere an Schornsteinen, Glockentürmen und Wehranlagen, so daß ein bautechnisch wertvolles, interessantes Buch entsteht, mit dem sich der Verfasser den Dank der werktätigen Ingenieure errungen hat. Das Buch ist ausführlich geschrieben, der Inhalt durch Erfahrungswerte, Zahlenrechnungen und gute Skizzen erläutert, kann also zum Studium bestens empfohlen werden.

Dresden. K. Beyer. 523

Dr.-Ing. habil. Dr. E. h. WILHELM **NUSSELT,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München, Technische Thermodynamik, I. Grundlagen. 2. verb. Aufl. (Sammlung Göschen, Bd. 1084.) 143 S. m. 71 Abb. Berlin 1943, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Nach ausführlicher Darlegung der beiden Hauptsätze wird die Thermodynamik der Gase und Dämpfe etwa in dem Umfang und der Darstellung behandelt, die der Einführungsvorlesung in dieses Gebiet an Technischen Hochschulen entspricht. Gegenüber der 1. Auflage wurde der Abschnitt über den II. Hauptsatz erheblich gekürzt und noch anschaulicher dargestellt. Neu angefügt wurde ein Abschnitt über die strömende Bewegung der Gase und Dämpfe.

Die Darstellung zeichnet sich durch eine ebenso knappe wie ungemein klare Sprache aus und bietet dem Studenten neben der Vorlesung eine hervorragende Zusammenfassung dieses Wissensgebietes. Für Kriegsteilnehmer wird das Bändchen ein besonders willkommenes Geschenk sein.

Dresden. Pauer. 506

MAX **LANDOLT,** Prof. u. Direktor des Technikums des Kantons Zürich in Winterthur, Größe, Maßzahl und Einheit. 85 S. Zürich 1943, Rascher Verlag. Preis frcs. 5,80.

Das Rechnen mit physikalischen Größen, d. h. mit dimensionsbehafteten Zahlen, ist für den Physiker und Techniker ständig wiederkehrende Notwendigkeit. Verf. will in seinem Buche die auf diesem Gebiet auftretenden Probleme aufzeigen und lösen. Er gibt zunächst im ersten Teil seiner Schrift eine klare und gründliche Anleitung zum Operieren mit diesen Größen. An zahlreichen einfachen Beispielen zeigt er, welche Rechengesetze man auf die physikalischen Größen anzuwenden hat, er stellt die Gleichungen auf, denen sie genügen, bringt die Umrechnungsmethoden in andere Maßeinheiten usw. Zum Schluß folgen dann noch eine Reihe vollständig durchgerechneter Übungsbeispiele. Der zweite, umfangreichere und bedeutsamere Teil bringt die mathematische Begründung jenes Größenkalküls. Verf. zeigt mit Zuhilfenahme der Gruppentheorie und unter wiederholtem Hinweis auf die physikalische Erfahrung, daß die Auffassung der physikalischen Größen als wirklicher Produkte aus Zahlenwert und Maßeinheit ihre Berechtigung hat, und daß man zumindest im Bereich der ersten sechs Grundoperationen die für die rationalen Zahlen geltenden Gesetze auch auf die physikalischen Größen anwenden darf. — Die beiden Teile der Schrift sind abgeschlossene Ganze und können unabhängig voneinander gelesen werden.

Berlin. Mosch. 516

Dr. WOLFGANG **FINKELNBURG,** Prof. a. d. Reichsuniversität Straßburg, Physik (Wissenschaftskunde in Einzeldarstellungen, herausgegeb. von Dr. Wolfgang Strauß u. Hans Ferdinand Schulz, Heft 3). 47 S. Freiburg i. Br. 1942, Hans Ferdinand Schulz Verlag. Preis kart. 1,80 M.

Verf. will in dieser Schrift dem der Physik und ihren großen Erfolgen Interesse entgegenbringenden Nichtfachmann einen Überblick über Art und Inhalt dieser Wissenschaft geben. Er schildert zunächst Wesen und Bedeutung der Physik im Rahmen der Naturwissenschaften, erläutert dann die Einteilung in experimentelle und theoretische Physik und legt die Methoden der physikalischen Forschung dar. Sodann geht er zur Behandlung der Einzelgebiete über. Nach Besprechung der wichtigsten Begriffe und Sätze aus Mechanik, Akustik, Optik und Elektrizitätslehre, aus dem Gebiete der „Makrophysik“ also, versucht er, dem Laien auch eine Vorstellung von dem jüngsten Entwicklungsstadium der Physik zu verschaffen, der „Mikrophysik“, die ja noch in keiner Weise ein fertiges, abgeschlossenes Gebilde darstellt und nicht nur dem Laien, sondern auch dem Forscher manche stark befremdende Schwierigkeit bietet. Dieses Kapitel, das sich u. a. mit dem Korpuskularcharakter des Lichtes und der Wellennatur der Materie, mit der Heisenbergschen Ungenauigkeitsrelation und der Quantenmechanik beschäftigt, kann natürlich nur eine Ahnung von der Größe und Wichtigkeit der physikalischen Forschung unserer Tage geben, damit aber auch einen Anreiz, sich mit diesen Dingen näher zu beschäftigen. Nach einer knappen Schilderung der Grenzgebiete der Physik (physikalische Chemie, Astrophysik, Geophysik, Biophysik, medizinische Physik), widmet er dem aus dem heutigen Stande der Forschung sich ergebenden naturwissenschaftlichen Weltbild eine kurze Darstellung. Die Schlußkapitel bringen Ausführungen über den Beruf des Physikers und über das physikalische Schrifttum. Wie man aus diesen kurzen Angaben ersieht, ist das anschaulich und flüssig geschriebene Buch von großer Vielseitigkeit. Insbesondere für den angehenden Physiker, der von der Schule her schon einige Kenntnisse über Physik mitbringt, und der sich einen Begriff von Umfang und Möglichkeiten des gewählten Berufs machen möchte, dürfte das Buch einen recht guten Leitfaden abgeben.

Berlin. Mosch. 517

Dr. WILHELM **MAGNUS,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, u. Dr. FRITZ **OBERHETTINGER,** Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaft in Einzeldarstellungen, Bd. LII.) VIII + 173 S. Berlin 1943, Springer-Verlag. Preis geb. 13,20 M.

„Die zunehmende Verwendung mathematischer Hilfsmittel in der physikalischen und technischen Literatur macht ein ständiges Nachschlagen in umfangreichen, mitunter schwer zugänglichen Werken der mathematischen Fachliteratur und in zahlreichen Einzelarbeiten notwendig.“ Mancher wird sich daher schon für seinen eigenen Gebrauch ein Verzeichnis der immer wiederkehrenden Formeln angelegt haben. Diese Arbeit erspart das vorliegende Buch. Es gibt eine sorgfältig ausgewählte, formelmäßige Zusammenstellung der Eigenschaften einer Reihe von speziellen Funktionen, die bei der geschickten Anordnung und bei dem übersichtlichen Druck ein leichtes Auffinden etwa gesuchter Formeln ermöglicht.

Man findet in den ersten Abschnitten Sätze und Formeln für die Gammafunktionen, die hypergeometrischen Funktionen und für die Zylinderfunktionen; hier wird auch kurz das Wichtigste über Mathieusche Funktionen gegeben. In einem weiteren Kapitel sind die Formeln für die Kugelfunktionen nebst Kegel- und Thorusfunktionen sowie die Funktionen von Gegenbauer zusammengestellt. Als Beispiel für weitere orthogonale Polynome findet man die Formeln für die Polynome von Tschebyscheff, Hermite, Jacobi und Laguerre. Das sechste Kapitel bringt dann die konfluente hypergeometrische Funktion und ihre Spezialfälle, wie die Laguerreschen Funktionen, das Fehlerintegral, die Fresnelschen Integrale, Integrallogarithmus, Exponentialintegral, Integralsinus und -kosinus usw. Es folgen die Thetafunktionen, elliptische Funktionen und Integrale, weiter die Integraltransformationen und Integralumkehrungen mit Tabellen, vor allem für die Fourier- und Laplacetransformation, ferner verschiedene Beispiele für Integralgleichungen erster Art. Im letzten Kapitel werden Differential-

operatoren für verschieden orthogonale Koordinaten aufgeführt, Beispiele für die Trennung der Veränderlichen gegeben und kurz auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingegangen. Eine Verzeichnung der Abkürzungen und Funktionssymbole erleichtert die Benutzung, ein Literaturverzeichnis ermöglicht, wenn nötig, ein leichtes Aufsuchen der Ableitungen und Beweise. Tabellen für einen großen Teil der hier behandelten Funktionen finden sich in den Tafeln von Jahnke-Emde, die ja auch einige der wichtigsten Formeln bringen. Das vorliegende Buch gibt eine weit ausführlichere Zusammenstellung dieser Formeln. Beide Werke ergänzen sich so in sehr nützlicher Weise.

Die Verf. haben mit diesem Buch ein Werk geschaffen, das wirklich fehlte. Der große Kreis von Mathematikern, Physikern und Technikern, denen bei ihrer Arbeit die hier behandelten Funktionen vorkommen, wird ihnen für die mühevolle Arbeit, die die geschickte Zusammenstellung und die Prüfung des umfangreichen Formelmateriales erfordert hat, sicher dankbar sein.

Dresden. Willers. 512

Prof. Dr. RUDOLF **ROTHE,** Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen, Formelsammlung. 7. Heft, Zusammenstellung der Formeln und Lehrsätze, unter Mitwirkung von Fachstudienrat Oskar Degosang u. Dr.-Ing. Gerhard Dobrack. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 43.) VI + 120 S. m. 74 Abb. Leipzig und Berlin 1943, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 4 M.

Mit dem vorliegenden 7. Heft des vierten Teilbandes ist das weitverbreitete Werk von R. Rothe, dessen erster Band in erster Auflage 1927 erschien, zum Abschluß gekommen. Der Verf. hat die Vollendung seines Werkes leider nicht mehr erlebt, doch hat ihm noch das druckfertige Manuskript dieses letzten Heftes vorgelegen. Es bringt in systematischer Zusammenstellung die wichtigsten Definitionen, Sätze und Formeln unter Hinweis auf die entsprechenden Paragraphen des Buches, kann aber auch unabhängig davon sehr gut als Formelsammlung gebraucht werden.

Das ausgezeichnete Werk, dessen erste Bände schon eine Reihe von Auflagen erlebt haben, wird auch weiterhin insbesondere von Studierenden neben den Vorlesungen gern gebraucht werden.

Dresden. Willers. 505

Dr. J. **HORN,** em. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4., fast unveränderte Auflage. (Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik, Bd. 10.) VIII + 196 S. m. 4 Fig. Berlin 1943, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 10 M.

Wie die 1937 erschienene dritte Auflage ist auch die jetzt vorliegende vierte ein fast unveränderter anastatischer Neudruck der 1927 erschienenen zweiten. Es erübrigt sich, der Neuauflage dieses viel gebrauchten einführenden Lehrbuches empfehlende Worte mit auf den Weg zu geben.

Dresden. Willers. 513

Dr. A. **TIMPE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Höhere Mathematik 1, II. Autographierte Vorlesungen. 84 u. 130 S. Stuttgart und Berlin 1942, Verlag W. Kohlhammer. Preis brosch. Teil I 3 M., Teil II 3,50 M.

Inhalt: Höhere Mathematik I. 1. Funktionenlehre. 2. Grenzwert und Stetigkeit. 3. Differentialrechnung. 4. Mittelwertsatz, unbestimmte Formen, Taylorsche Formel, Kurvendiskussion. 5. Integralrechnung. Teil II. 1. Funktionen von mehreren Veränderlichen. 2. Unentwickelte Funktionen, Differentialgeometrie der ebenen Kurven. 3. Linien- und Gebietsintegrale. 4. Unendliche Reihen. 5. Komplexe Veränderliche und Funktionen.

Autographierte Vorlesungen können immer nur ein Notbehelf sein, um den empfindlichsten Mangel an Lehrbüchern zu mildern. Darnach darf an eine solche Vorlesung natürlich nicht derselbe strenge Maßstab gelegt werden wie an ein Lehrbuch. Trotzdem muß man in dem vorliegenden Fall ein Auge zudrücken, zum mindesten, was das Äußere der Timpeschen Vorlesungen betrifft: Auf 214 Textseiten finden sich rund 50 (!) handschriftliche Verbesserungen, der Text ist an entscheidenden Stellen (Grenzen der Doppelintegrale usf.) schlecht lesbar, die Zeichnungen sind nicht immer gut geraten. Auch inhaltlich kann man nicht mit allem einverstanden sein, z. B. wenn der Satz, daß eine algebraische Gleichung n-ten Grades höchstens nWurzeln hat, als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet wird oder wenn behauptet wird, daß die trigonometrische Reihe $\Sigma b_n \cos nx$ mit positivem, monoton zu null abnehmendem b_n für alle x konvergiere.

Den Hörern des Verfassers mag das Heft an Stelle eines eigenen Manuskriptes und als Ergänzung des Gehörten vielleicht gute Dienste leisten, einem Außenstehenden kann es jedoch kaum empfohlen werden.

Freiberg. Grüß. 504

Prof. Dr. FR. A. **WILLERS,** Mathematische Instrumente. 270 S. m. 199 Bildern. München u. Berlin 1943, Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 14 M.

Das Buch entstand durch Überarbeitung und Ergänzung verschiedener Aufsätze des Verfassers, die im Laufe der letzten Jahre im Archiv für Technisches Messen erschienen sind. Der Verlag, von dem der Wunsch hierzu ausgegangen ist, hat sich durch diese zusammenhängende und erweiterte Herausgabe der Aufsätze in einem sehr gut ausgestatteten Buch ein großes Verdienst erworben.

Das Buch ist in sechs Abschnitte eingeteilt, in denen Rechenschieber, Rechenmaschinen, Koordinatographen sowie Kurvenmesser und Differentiatoren, Planimeter, harmonische Analysatoren und Integraphen sowie Integratoren behandelt werden. Ein umfangreiches Verzeichnis des in Frage kommenden Schrifttums sowie ein Namen- und Sachverzeichnis sind beigefügt.

Der Abschnitt über Rechenschieber umfaßt nur zwei Seiten. Mit Rücksicht auf die große praktische Bedeutung des einfachen Rechenschiebers und der weiteren rechenschieberartigen Rechenvorrichtungen wäre eine Erweiterung dieses Abschnittes in einer späteren Auflage zu begrüßen.

Der Abschnitt über Rechenmaschinen ist eingeteilt in Addiermaschinen, erweiterte Additionsmaschinen und eigentliche Multiplikationsmaschinen. Im Zusammenhang damit werden einige Regeln für das Maschinenrechnen mitgeteilt. Bei den reinen Addiermaschinen wird zwischen einstufig arbeitenden mit Volltastatur, zweistufig arbeitenden mit Zehnertastatur und nach dem Speicherverfahren arbeitenden Maschinen unterschieden. Die zum Multiplizieren und Dividieren verwendbaren erweiterten Additionsmaschinen sind eingeteilt in Sprossenrad-, Staffelwalzen-, Proportionalhebel- und Schaltklinkenmaschinen. Bei allen Bauarten werden außer ihrem Aufbau die ihnen eigenen Einrichtungen und ihre Verwendungsmöglichkeit zur selbsttätigen Multiplikation und Division beschrieben.

Im dritten Abschnitt werden Koordinatographen zum Auftragen nach rechtwinkligen Koordinaten und nach Polarkoordinaten, Kurvenmesser und Differentiatoren behandelt; bei den letzteren handelt es sich in der Hauptsache um Vorrichtungen zum Zeichnen der Tangente in einem Punkt an eine Kurve.

Der Abschnitt über Planimeter beginnt mit einem kurzen geschichtlichen Überblick und befaßt sich mit den Vorrichtungen für die Flächenbestimmung durch Zerlegen und Verwandeln, mit der Theorie der Umfahrungsplanimeter, den Integriervorrichtungen den Polarplanimetern, den verschiedenen Linearplanimetern, den Linear-Potenzplanimetern, den Radialplanimetern, dem Schneideplanimeter und den Integrimetern. Anhangsweise werden die Fehlerursachen bei Messungen mit einer Integrierrolle behandelt.

Der den harmonischen Analysatoren gewidmete Abschnitt ist eingeteilt in Bestimmung der Fourier-Koeffizienten mit dem Planimeter, harmonische Analysatoren, harmonische Analyse mittels gleichabständiger Ordinaten und das Stieltjes-Planimeter.

In dem letzten Abschnitt werden Grundintegraphen und Differentiatoren, Anwendungen der Integraphen, allgemeine Integraphen sowie Integriermaschinen behandelt.

Wie diese kurze Übersicht zeigt, ist der Inhalt des Buches überaus reichhaltig, so daß jeder, der sich für mathematische Instrumente interessiert, das ihn Betreffende darin finden wird. Gute Abbildungen und klare, schematisch gehaltene Darstellungen sind reichlich vorhanden.

Da die Zahl der Bücher über mathematische Instrumente nicht groß ist, und das vorliegende Buch nach Inhalt und Behandlung des Stoffes bestens empfohlen werden kann, so wird es sicher viele geben, die das Buch mit Nutzen zur Hand nehmen.

Stuttgart. P. Werkmeister. 527

Prof. Dr. **HERMANN SCHUBERT**, Mathematische Mußestunden, eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Neubearb. von Prof. Dr. Fitting. 10. vermehrte Auflage. 271 S. Berlin 1943, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 4,80 M.

Das beliebte Schubertsche Buch, das in der Neubearbeitung eines so ausgezeichneten Kenners wie F. Fitting außerordentlich gewonnen hatte, erscheint hier nochmals erweitert und bereichert in zehnter Auflage, 271 Seiten stark. Wir verdanken F. Fitting interessante und wichtige Forschungen auf dem Gebiet der magischen Quadrate und können es nur lebhaft begrüßen, daß er einige seiner neueren Ergebnisse in diese neue Auflage hineingearbeitet hat. Auch das Kapitel über Rösselsprünge bietet in der vorliegenden Auflage manches Neue, so z. B. ein einfaches Verfahren, um auf dem Schachbrett mit 36 Feldern alle möglichen Rösselsprünge zu finden. Das Buch wird besonders unsern Frontsoldaten und Verwundeten eine sehr willkommene Lektüre sein.

Prag. G. Kowalewski. 515

Dr. WL. K. **HRISTOW**, Chef d. Astron. Dienstes d. Militärgeogr. Instituts zu Sofia, Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid. VI + 80 S. m. 9 Abb. Leipzig und Berlin 1943, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 5 M.

Die von K. F. Gauß bei seiner Landesvermessung von Hannover benutzten, vom Ellipsoid ausgehenden ebenen Koordinaten, durch die die winkeltreue zylindrische Abbildung in transversaler Lage bestimmt ist, wurden insbesondere von L. Krüger einer eingehenden Bearbeitung unterzogen; sie werden deshalb seither als Gauß-Krügersche Koordinaten bezeichnet. Nachdem das betreffende Werk von L. Krüger[1]) und auch ein früher erschienenes, denselben Stoff behandelndes von O. Schreiber[2]) schon längere Zeit vergriffen sind, hat der Verfasser mit Benutzung eigener, bereits veröffentlichter Vorarbeiten in dankenswerter Weise die Aufgabe übernommen, eine umfassende und gründliche Darstellung dieser Koordinaten zu geben.

Der Stoff ist eingeteilt in einen theoretischen Teil und in einen praktischen Teil. Der letztere Teil enthält außer einer Zusammenstellung aller Formeln eine Reihe von Tafeln, denen das Besselsche Erdellipsoid zugrunde liegt. Am Schluß werden für alle in Frage kommenden Aufgaben durchgerechnete Zahlenbeispiele mitgeteilt.

Mit Rücksicht auf die nach Einführung der Meridianstreifen große Bedeutung der Gauß-Krügerschen Koordinaten und der durch sie bestimmten Abbildung hat sich der Verfasser durch seine Arbeit ein großes Verdienst erworben.

Stuttgart. P. Werkmeister. 526

[1]) Konforme Abbilduug des Erdellipsoids in der Ebene. Potsdam 1912.

[2]) Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung. Hannover 1866.

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

F. **KOHLRAUSCH**, Praktische Physik zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik, Bd. 1 u. Bd. 2. Herausgegeben von F. Henning, Direktor bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. 18., neubearb. Aufl. VII + 535 S. m. 298 Abb. u. VI + 578 S. m. 328 Abb. Leipzig u. Berlin 1943, Verlag B. G. Teubner. Preis zus. 35 M.

Dr. phil. habil. U. **STILLE**, Dozent a. d. Techn. Hochschule Braunschweig, Umrechnungstafel für die Zahlenwerte elektrischer und magnetischer Größen. Braunschweig 1943, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis 2,50 M.

Dr. phil. habil. H. **GEBELEIN**, Baurat a. d. Staatl. Ing.-Schule Eßlingen u. Dozent an d. Techn. Hochschule Stuttgart, Zahl und Wirklichkeit, Grundzüge einer mathematischen Statistik. Mit einem Geleitwort von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. E. Wagemann, Präsident des Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung. XII + 425 S. Leipzig 1943, Verlag Quelle & Meyer. Preis geb. 11 M.

Dr. phil. GEORG **PRANGE**, weiland Prof. a. d. Techn. Hochschule Hannover, Vorlesungen über Integral- und Differentialrechnung, I. Bd. Funktionen einer reellen Veränderlichen. Herausgegeben von Dr. phil. Werner v. Koppenfels, Prof. a. d. Deutschen Technischen Hochschule Brünn. XI + 436 S. m. 140 Abb. Berlin 1943, Springer-Verlag. Preis geb. 22,50 M.

Prof. Dr. BERNHARD **BAULE**, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. III, Analytische Geometrie. 80 S. m. 89 Abb. Leipzig 1943, Verlag S. Hirzel. Preis brosch. 4,40 M. Dgl. Bd. IV, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 102 S. m. 41 Abb. Leipzig 1943, Verlag S. Hirzel. Preis brosch. 5,80 M.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

F. Reutter: **Eine Anwendung des absoluten Parallelismus auf die Schalentheorie.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 87 bis 98.

In obigem Aufsatz werden am Schluß die Fundamentalgrößen 2. Ordnung $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ für eine deformierte Schalenmittelfläche abgeleitet. Für $\bar{M}$ wird die Formel angegeben

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}=\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{L}{\sqrt{E}}\left(\bar{u}_v-\frac{1}{2}\,\bar{v}\,\frac{G_u}{\sqrt{E\,G}}\right)\\&+\frac{N}{\sqrt{G}}\left(\bar{v}_u-\frac{1}{2}\,\bar{u}\,\frac{E_v}{\sqrt{E\,G}}\right)\\&-\left(\frac{E_v}{2\sqrt{E}}-\sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\bar{w}_u}{\sqrt{E}}+\frac{\bar{u}\,L}{E}\right)\\&-\left(\frac{G_u}{2\sqrt{G}}-\sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\bar{w}_v}{\sqrt{G}}+\frac{\bar{v}\,N}{G}\right)\Bigg].\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (1).$$

Hierin bedeuten $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ die Verschiebungskomponenten in Richtung von

$$\frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}},\ \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}},\ \nu \text{ und } \bar{v}_u,\ \bar{u}_v$$

die partiellen Ableitungen nach den Parametern u und v. Es soll nun gezeigt werden, wie Gl. (1) in eine für weitere Rechnungen sehr übersichtliche Form gebracht werden kann.

Zunächst formen wir in (1) die symbolischen Operatoren um, indem wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned}&-\left(\frac{E_v}{2\sqrt{E}}-\sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\ \right)\\&=-E\left(\frac{E_v}{2\,E\sqrt{E}}-\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\\&=E\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\ \right),\\&-\left(\frac{G_u}{2\sqrt{G}}-\sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\ \right)\\&=-G\left(\frac{G_u}{2\,G\sqrt{G}}-\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\\&=G\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\ \right).\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (2),$$

Damit wird aus (1)

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}=\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{L}{\sqrt{E}}\left(\bar{u}_v-\frac{1}{2}\,\bar{v}\,\frac{G_u}{\sqrt{E\,G}}\right)\\&+\frac{N}{\sqrt{G}}\left(\bar{v}_u-\frac{1}{2}\,\bar{u}\,\frac{E_v}{\sqrt{E\,G}}\right)\\&+E\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{w}_u}{E}+\frac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}}\right)\\&+G\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{w}_v}{G}+\frac{\bar{v}\,N}{G\sqrt{G}}\right)\Bigg].\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; (3).$$

Nach entsprechender Zusammenfassung kommt aus (3)

$$\left.\begin{aligned}&2\,\frac{L}{\sqrt{E}}\,\bar{u}_v-\frac{N\,E_v}{2\,G\sqrt{E}}\,\bar{u}+E\,\bar{u}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{E\sqrt{E}}\right),\\&2\,\frac{N}{\sqrt{G}}\,\bar{v}_u-\frac{L\,G_u}{2\,E\sqrt{G}}\,\bar{v}+G\,\bar{v}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{G\sqrt{G}}\right).\end{aligned}\right\}\quad . \; (4).$$

Entsprechend der Voraussetzung, daß die Parameterkurven der undeformierten Schale Krümmungslinien ($F = M = 0$) sein sollen, erhalten wir aus den Mainardischen Gleichungen[1])

$$\frac{\partial L}{\partial v}=\frac{E_v}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right);\qquad \frac{\partial N}{\partial u}=\frac{G_u}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)\quad . \; . \; (5)$$

die weitere Form

$$\left.\begin{aligned}E\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{E\sqrt{E}}\right)&=\frac{E_v}{2\sqrt{E}}\left(\frac{N}{G}-2\,\frac{L}{E}\right),\\G\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{G\sqrt{G}}\right)&=\frac{G_u}{2\sqrt{G}}\left(\frac{L}{E}-2\,\frac{N}{G}\right).\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (6).$$

Aus (4) wird dann in Verbindung mit (6)

$$\left.\begin{aligned}2\,\frac{L}{\sqrt{E}}\,\bar{u}_v-\frac{L\,E_v}{E\sqrt{E}}&=2\,L\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{E}}\right),\\2\,\frac{N}{\sqrt{G}}\,\bar{v}_u-\frac{N\,G_u}{G\sqrt{G}}&=2\,N\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{\sqrt{G}}\right).\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (7).$$

Schließlich erhält man die sehr bequeme Darstellung von $\bar{M}$ in der übersichtlichen Form:

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{M}=L\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{E}}\right)+N\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{v}}{\sqrt{G}}\right)\\+\frac{1}{2}\left[E\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\bar{w}_u}{E}\right)+G\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\bar{w}_v}{G}\right)\right].\end{aligned}}\quad . \; . \; (8).$$

Man erkennt hierin sehr schön den Zusammenhang von $\bar{M}$ mit den alten Fundamentalgrößen und den Verschiebungskomponenten.

Karlsruhe, z. Zt. im Felde. J. Fadle VDI. 511

[1]) Man vgl. z. B: Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Berlin und Leipzig 1931, Bd. II, S. 18.

U. T. Bödewadt: **Die Drehströmung über festem Grunde.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940) S. 241—253.

Die in dieser Arbeit auf S. 242 oben herangezogene Vernachlässigung der Grenzschichttheorie, welche das Ergebnis der ganzen Arbeit auf hinreichend große Reynoldssche Zahlen beschränkt, ist vermeidbar. Macht man für den Druck p den Ansatz

$$p=\varrho\,\frac{r^2\,\omega^2}{2}-\varrho\,\nu\,\omega\,P\,(\zeta)$$

mit der noch zu bestimmenden Funktion $P\,(\zeta)$, so kommt man genau so zum Ziele, und die weiteren Ergebnisse von Bödewadt bleiben unverändert bestehen. Die Bödewadtsche Lösung ist also eine strenge Lösung der vollständigen Navier-Stokesschen Gleichungen und damit für alle Reynoldsschen Zahlen gültig.

Bei dieser Gelegenheit sei auf folgenden Druckfehler hingewiesen. Die in den Gln. (1.2.1) und (1.2.2) der obengenannten Arbeit auf den rechten Seiten angegebenen Reibungsglieder sind unvollständig. Gerechnet wurde jedoch mit den richtigen Gleichungen.

Göttingen. H. Görtler.

Die Zuschrift hat Herrn U. T. Bödewadt vorgelegen. 535

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —
 — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.